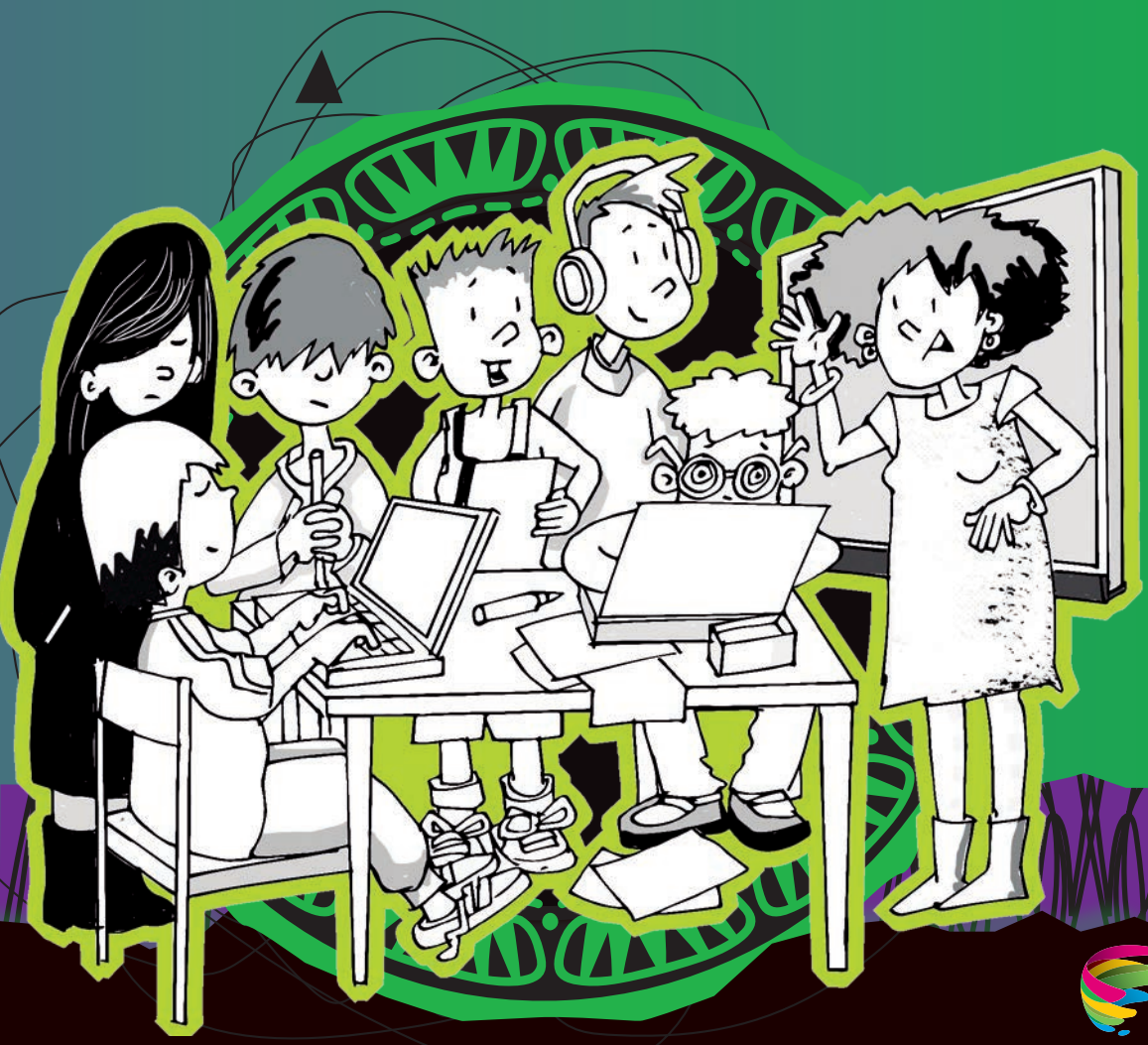
LIBRO DEL DOCENTE

El libro de Mate

1.° 2.°

Horacio Itzcovich
Andrea Novembre
Verónica Grimaldi
Cecilia de Cortazar
Romina Herrera
Jimena Lorenzo
Mauro Nicodemo
Débora Sanguinetti
Paula Trillini

Coordinación de la serie:
Claudia Broitman



SANTILLANA

LIBRO DEL DOCENTE

El libro de Mate

1.°
2.°

El libro de Mate 1.°/2.°. Libro del docente es una obra colectiva, creada, diseñada y realizada en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana, bajo la dirección de **Graciela M. Valle**, por el siguiente equipo:

Coordinación de la serie: Claudia Broitman
Coordinación pedagógica: Andrea Novembre y Horacio Itzcovich
Lectura crítica: Verónica Grimaldi

Autores: Cecilia de Cortazar, Romina Herrera, Jimena Lorenzo, Mauro Nicodemo, Débora Sanguinetti y Paula Trillini

Editora: Verónica L. Outón

Jefa de edición: María Laura Latorre

Gerencia de arte: Silvina Gretel Espil

Gerencia de contenidos: Patricia S. Granieri

ÍNDICE

SANTILLANA

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el siguiente equipo:

Diseño de maqueta: Mariela Santos y Silvina Gretel Espil.

Diseño de tapa: Mariela Santos y Silvina Gretel Espil.

Diagramación: Silvia Prado y Verónica Trombetta [Estudio Golum].

Corrección: Patricia Motto Rouco.

Ilustración: Juan Noailles, Getty Images / DigitalVision Vectors.

Documentación fotográfica: Carolina S. Álvarez Páramo y Cynthia R. Maldonado.

Fotografía: Archivo Santillana.

Preimpresión: Marcelo Fernández y Maximiliano Rodríguez.

Gerencia de producción: Paula M. García.

Producción: Elías E. Fortunato y Andrés Zvaliauskas.

Esta publicación fue elaborada teniendo en cuenta las observaciones del Instituto Nacional contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi) surgidas en encuentros organizados con editores de libros de texto. Para facilitar la lectura, y sin intención de promover el lenguaje sexista, esta publicación utiliza el género masculino para designar a todos los elementos de una clase.

El libro de mate 1.° / 2.°. Libro del docente / Horacio Itzcovich... [et al.] ; coordinación general de Claudia Broitman. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires Santillana, 2020.
192 p. ; 28 x 22 cm.

ISBN 978-950-46-6135-1

1. Matemática. 2. Escuelas Secundarias. I. Itzcovich, Horacio. II. Broitman, Claudia, coord.
CDD 510.712

ISBN: 978-950-46-6135-1
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Impreso en Argentina. *Printed in Argentina.*
Primera edición: noviembre de 2020.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de noviembre de 2020 en FP Compañía Impresora, Beruti 1560, Florida, Buenos Aires, República Argentina.

I. Enfoque didáctico de *El libro de Mate 1.°/2.°*

En este apartado compartiremos algunas ideas sobre la enseñanza de la Matemática que fundamentan las decisiones adoptadas para la elaboración de este libro.

Los problemas en las clases de Matemática

Los problemas constituyen la base del trabajo matemático, permiten proponer nuevos desafíos y durante cierto tiempo se constituyen en objeto de estudio. Se parte de la idea de que es necesario que los estudiantes se enfrenten a nuevas y variadas situaciones que promuevan procesos constructivos a partir de la exigencia de poner en juego relaciones que pudieran estar disponibles. Este proceso exige **elaboraciones y reelaboraciones sucesivas** –individuales y colectivas– que pueden ser propiciadas desde la enseñanza apuntando al establecimiento de relaciones entre los conocimientos disponibles de los alumnos, los nuevos que se van produciendo durante las clases y los saberes propios de la Matemática.

Para que los estudiantes puedan continuar construyendo ideas acerca del trabajo matemático, ampliar a nuevos sentidos y recursos alrededor de los conocimientos estudiados en años anteriores, y simultáneamente producir relaciones, propiedades y conceptos nuevos, precisan enfrentarse a situaciones que les presenten cierto grado de dificultad, para las cuales los conocimientos de que disponen no sean suficientes. La complejidad de los problemas ha de ser tal que a los alumnos no les resulte cómodo su abordaje, pero a su vez debe permitirles **imaginar y desplegar formas de resolución o exploración**. Es esperable que las estrategias utilizadas inicialmente no sean expertas ni necesariamente correctas, pero constituirán el punto de partida para la producción de nuevos conocimientos.

Por lo general, al hablar de problemas es frecuente imaginar enunciados verbales con preguntas que requieren un cálculo, una técnica ya conocida para poder arribar a la respuesta. Pero otras prácticas también pueden constituirse en problemas, por ejemplo: explorar diferentes maneras de resolver un mismo problema, interpretar procedimientos distintos de los propios, determinar la validez de ciertas afirmaciones, establecer medidas de elementos de una figura sin medir, anticipar si será posible realizar una determinada construcción geométrica apelando a propiedades de las figuras, analizar la cantidad de soluciones que podría admitir un problema, interpretar una demostración o una explicación, establecer relaciones entre varias técnicas o formas de representación, estimar un resultado, interpretar qué informaciones ofrecen diferentes representaciones. En el tratamiento de los diversos contenidos se ha buscado presentar una **variedad de tipos de problemas** que incluyen, entre otros, los ejemplos mencionados.

En cada capítulo de este libro se propone la resolución de una **colección de situaciones que están relacionadas**. Se busca que los alumnos puedan poner en juego sus conocimientos como punto de partida –aun cuando sean erróneos o no convencionales– y a la vez ponerlos a prueba, modificarlos, ampliarlos y sistematizarlos. Un trabajo sostenido en torno a ciertas cuestiones vinculadas entre sí favorece la **reflexión y la reorganización de estrategias de resolución**, permite volver

sobre las relaciones que se identificaron o establecieron en clases o problemas anteriores, y habilita a abandonar ensayos erróneos e intentar nuevas aproximaciones.

Además de retornar sobre un mismo tipo de situaciones con nuevas herramientas, es necesario que los estudiantes se enfrenten a nuevos problemas que amplíen los sentidos del conocimiento que se está tratando. Es así como se van incorporando progresivamente ciertas variaciones que agregan nuevos desafíos. Y aquellas cuestiones que inicialmente se resuelven con estrategias menos avanzadas podrán resolverse con recursos más adaptados, convirtiendo –a través del estudio de dichos problemas– lo novedoso en conocido.

Características de la actividad matemática que se busca propiciar

Además de la resolución de diferentes tipos de problemas y de la **reflexión sobre recursos, técnicas, relaciones y representaciones elaboradas** para su resolución, hay otras marcas del trabajo matemático que se han considerado para el desarrollo de este libro.

Con frecuencia, en la resolución de un problema, un primer intento no siempre conduce a "buen puerto". Es necesario realizar varios ensayos, identificar en qué consisten los errores que impiden arribar a la solución, buscar cierta información que puede estar involucrada en el trabajo que se propone y no fue considerada, etc. Este proceso implica ir tomando conciencia de los efectos de las decisiones involucradas en la resolución y empezar a **sistematizar la búsqueda**.

Para posibilitar tanto la exploración como la sistematización por parte de los estudiantes es central el doble rol del docente: por un lado, alienta el momento de búsqueda habilitando a los estudiantes a recurrir a diversas estrategias; pero en otros momentos propone analizar los ensayos efectuados, discutir a partir de los errores producidos, sistematizar los recursos que hayan aparecido, organizar los nuevos conocimientos elaborados, presentar vocabulario, formas de representación o nuevas relaciones. Se trata de propiciar un ida y vuelta entre los **procesos de exploración** y los **procesos de reflexión** de manera que se alimenten recíprocamente.

Durante la exploración de un problema nuevo es esperable que los estudiantes hagan dibujos, representaciones gráficas o simbólicas, y utilicen cálculos, diagramas, etc. Estas **formas de representación** son parte del desarrollo del trabajo. El docente podría alentar a sus alumnos a que elaboren representaciones propias, aun cuando sean poco adaptadas a la situación que se trata de resolver. También podría proponer un análisis de esas formas de representación y la discusión sobre su fertilidad, su pertinencia, su validez. Avanzar sobre las formas de representación es uno de los aspectos que se espera promover en el proceso de estudio de un concepto. Es parte de la tarea docente ofrecer, si resultara conveniente o necesario, otras formas de representación para que los alumnos puedan incorporarlas progresivamente. Se trata de establecer relaciones entre las formas de representación que ellos elaboraron y las producidas por la Matemática.

Parte de lo que se pretende que asuman los alumnos como actividad matemática está asociado a **determinar la validez**. En este sentido, se apunta a generar en la clase condiciones para que los estudiantes puedan hacerse cargo, por sus propios medios, de la validez de los resultados que producen y de las relaciones que establecen,

abonando así al despliegue de un trabajo cada vez más autónomo. En este sentido, es un objetivo que los alumnos puedan despegarse de la mirada del docente en cuanto a si está bien o si está mal lo producido. Se trata de instalar como parte del trabajo del alumno **la responsabilidad de verificar si lo realizado es pertinente o no**, mediante diferentes recursos. Este aspecto es quizás el más complejo de tratar en el desarrollo de las clases.

En ciertas situaciones se propone corroborar algún resultado apelando a recursos tecnológicos. En otras oportunidades los alumnos podrán constatar sus anticipaciones verificando de manera más empírica (probando, construyendo, calculando, midiendo, usando una representación gráfica). Sin embargo, se apunta a poner en el centro del trabajo matemático la **elaboración de argumentos o fundamentos** apoyados en relaciones matemáticas que permitan establecer la validez de los procedimientos elaborados y los resultados. Convocar a los estudiantes a desarrollar procesos de validación fomenta la autonomía intelectual.

Simultáneamente a la adquisición de conocimientos que les permitan dar cuenta de la validez de sus elaboraciones, se busca que los alumnos puedan involucrarse en la **determinación de los alcances de los recursos y resultados** que se van obteniendo. Inicialmente pueden determinar la validez de una afirmación o de un cálculo específico en función de un problema o un contexto particular. Se tratará entonces de promover la reflexión hacia el **carácter más general** de ciertas relaciones que han circulado estableciendo reglas válidas para cualquier caso o ciertos dominios de validez.

Otro tipo de tarea que se propone en este libro –y que forma parte de la actividad matemática que se intenta propiciar– involucra la posibilidad de **establecer relaciones entre conceptos** que no se conectan de manera evidente a los ojos de los alumnos. Con la intención de explicitar esas relaciones –por ejemplo, entre expresiones algebraicas y funciones, entre la solución de una ecuación y las condiciones que verifican ciertos números, entre fracciones y probabilidad–, se proponen diferentes momentos de trabajo en los cuales algunos conocimientos que ya han sido abordados, que han circulado y que los alumnos tienen en cierta forma disponibles, puedan comenzar a funcionar de manera simultánea para tratar nuevos problemas.

II. El uso de recursos tecnológicos

En varios capítulos de este libro se propone que los alumnos apelen a recursos tecnológicos. Por un lado se propicia el **uso de la calculadora para resolver problemas** que requieren varios cálculos o en los que el centro de la actividad no es el cálculo sino el análisis de las relaciones involucradas. Estas situaciones están identificadas con el ícono para resolver y van acompañadas también por este otro ícono para resolver, dado que se busca alentar que los alumnos **puedan usar calculadoras de mano, calculadoras de tablets o computadoras o, incluso, calculadoras de teléfonos celulares**.

En otros casos se sugiere el uso de la **calculadora** como **herramienta de verificación** de resultados obtenidos mediante otros recursos, para explorar propiedades de las operaciones o de la divisibilidad, para **indagar acerca de la validez** de ciertas afirmaciones que incluyen expresiones algebraicas o fórmulas,

para tratar potencias y raíces, para **anticipar relaciones** que involucran funciones, para **establecer relaciones** entre fracciones y expresiones decimales, etc. Estas situaciones están identificadas con los íconos Para comprobar Para comprobar.

En esta serie se invita a la resolución de problemas geométricos usando diferentes instrumentos de geometría, y también los íconos explicitan cuáles son los habilitados en cada caso.

Para usar Para usar Para usar Graduada Para usar No graduada Para usar Para usar

En algunos problemas de los capítulos de Geometría y de los capítulos de Funciones se sugiere usar el **programa GeoGebra** con diferentes finalidades. En Geometría, el programa es un recurso potente para explorar, analizar y debatir acerca de propiedades de las figuras a partir de situaciones que involucran construcciones. En todos los casos **el docente podrá optar entre proponer que los estudiantes resuelvan esos problemas con instrumentos de geometría en la hoja o bien con el programa GeoGebra**.

La posibilidad de **movimiento o arrastre** que implica la construcción de figuras con un programa de Geometría Dinámica puede resultar novedosa para algunos alumnos, y al mismo tiempo es una de las características que se debe ir reconociendo o estableciendo para aprovechar algunas ventajas que ofrece este tipo de programas. Se trata de avanzar con los estudiantes en la identificación de que **una construcción de cierta figura será considerada pertinente si, al mover o arrastrar cualquiera de sus elementos, sigue preservando las propiedades de la figura que se construyó**. Si se desarma en algún momento determinado, producto del movimiento que se le impregna, probablemente algunas de las relaciones que verifica la figura habrán sido consideradas pero otras habrán sido omitidas, cuestión que constituye una oportunidad para volver sobre el procedimiento de construcción, las herramientas que se utilizaron y las propiedades que se tuvieron en cuenta o no. A lo largo de las clases, será necesario tratar con ejemplos de cómo se deforma una figura que no fue construida a partir de sus propiedades necesarias y de cómo no se deforma cuando sí fueron tenidas en cuenta dichas propiedades. También, se podrán analizar colectivamente ciertas construcciones realizadas por los alumnos o por el docente, y anticipar si se deformarán o no. De esta manera, los estudiantes irán considerando la idea de movimiento que incorpora el programa GeoGebra, las herramientas empleadas y su relación con la pertinencia de la construcción.

En los capítulos de Funciones, al igual que en el caso de Geometría, el docente podrá optar por sugerir el uso de lápiz y papel o GeoGebra. Se propone, en algunas oportunidades, que los estudiantes puedan abordar el estudio de un proceso que varía, el análisis del comportamiento de una función, la identificación de un par ordenado que pertenece a un gráfico, el reconocimiento de condiciones que cumplen ciertos pares ordenados, etc., a partir de un trabajo apoyado en el programa. El juego simultáneo entre expresiones algebraicas que pueden introducirse en la barra de entradas, las representaciones gráficas de funciones que habilita, las transformaciones que se le pueden impregnar tanto a las expresiones como a los gráficos, conforman una colección de recursos potentes al momento de explorar y tratar de comprender algunas nociones asociadas con estos objetos matemáticos.

También se propone el uso de este programa en el capítulo sobre Medida, al abordar problemas relativos al área de figuras y a la comparación de áreas. Del mismo modo que para las construcciones geométricas, el docente podrá optar entre proponer que los alumnos utilicen dibujos en la hoja o que apelen al programa GeoGebra.

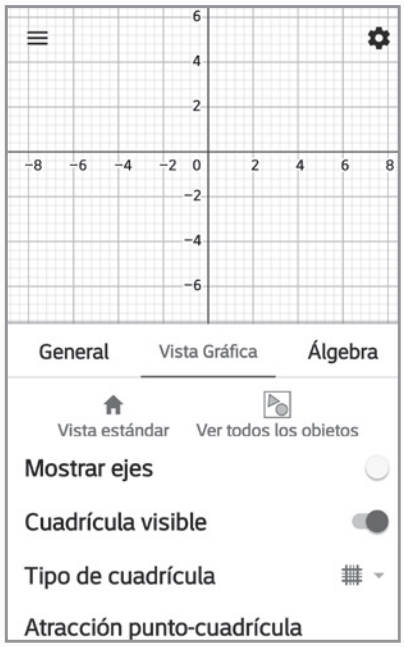
Estos problemas, en todos los capítulos, se identifican con el ícono .

En algunos casos se podría sugerir su uso para explorar relaciones y resolver, y en otros casos el docente podrá proponer a sus alumnos que recurran al programa para comprobar si las respuestas elaboradas son correctas. Del mismo modo que hemos señalado para la calculadora, las situaciones para resolver o comprobar con GeoGebra están acompañadas también por estos otros íconos o , dado que se busca que los alumnos puedan usar el programa GeoGebra en tablets o en computadoras e incluso en sus teléfonos celulares.

Es muy probable que varios estudiantes no hayan usado anteriormente este programa, por lo que será interesante **promover una primera instancia de exploración libre** en la que podrán dibujar diferentes figuras, identificando las herramientas que ofrece. En una segunda instancia se puede plantear la construcción de un objeto geométrico determinado recurriendo a las diversas herramientas que provee el programa. También resultará pertinente generar un espacio de trabajo para identificar el modo de introducir la expresión de una función y poder tratar con su gráfico. Explorar el programa será necesario para enfrentar los problemas que el libro propone.

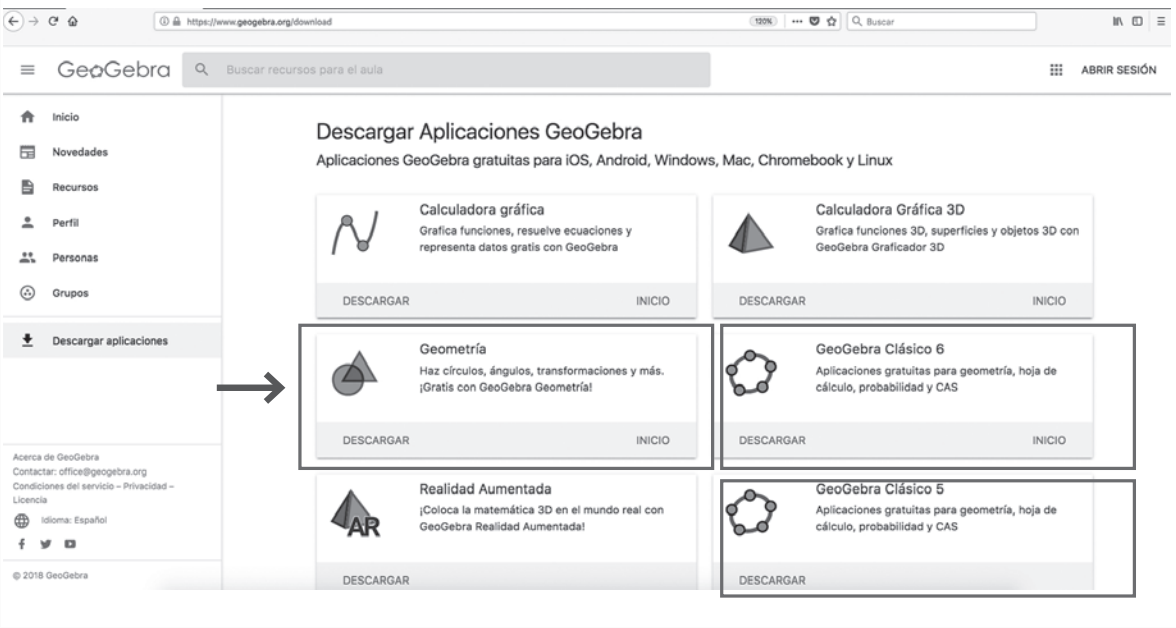
Si los estudiantes usaran celulares o *tablets*, podrán instalar alguna de las diferentes aplicaciones de GeoGebra que se ofrecen, por ejemplo, GeoGebra Geometría o Calculadora Gráfica GeoGebra.

GeoGebra Geometría

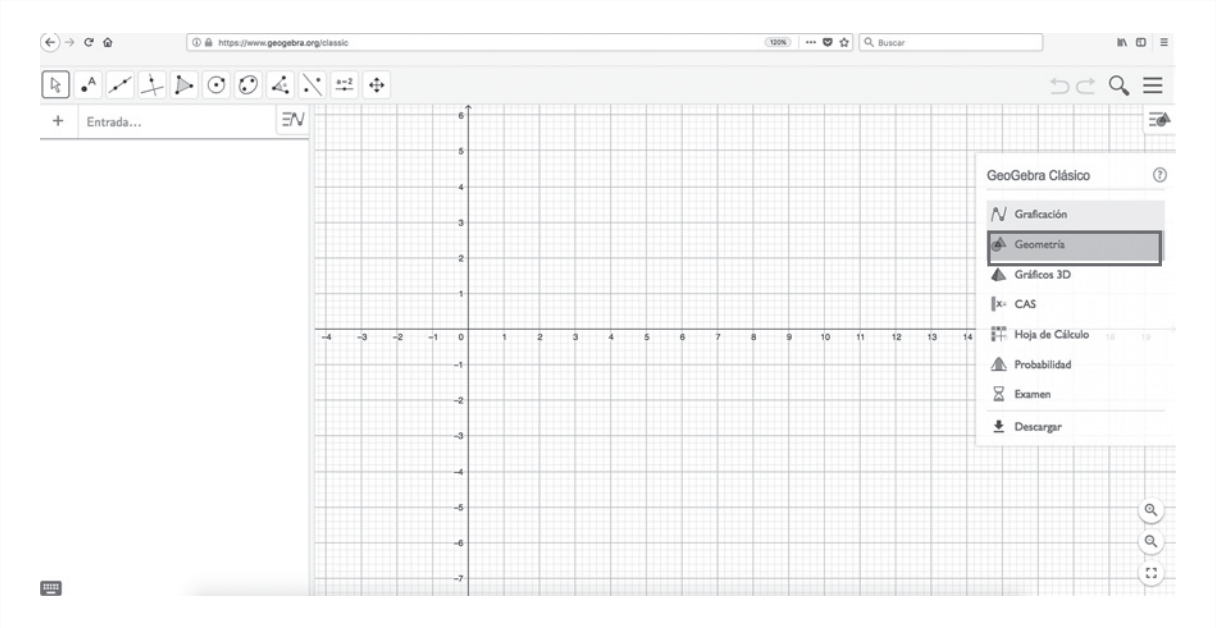


Calculadora Gráfica GeoGebra

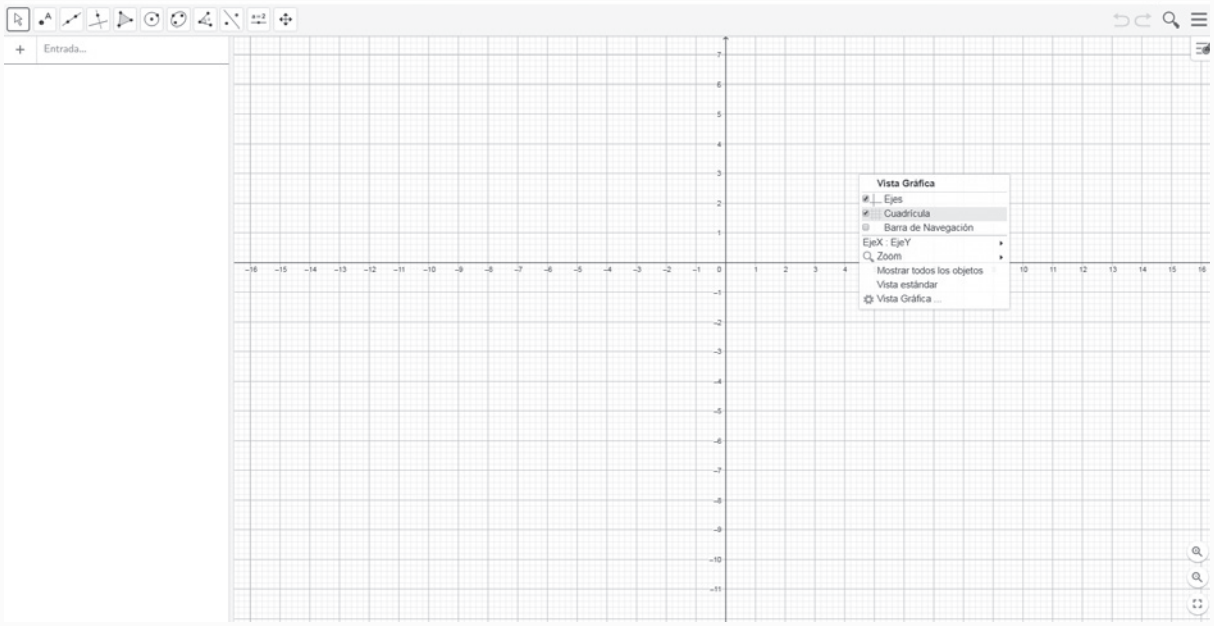
En las computadoras, el programa se puede **descargar de manera gratuita** del sitio www.geogebra.org. Hay dos versiones: GeoGebra Clásico (5 o 6) y GeoGebra Geometría. Se pueden usar en línea o descargarlas. Se sugiere descargarlas en todas las computadoras que los alumnos y el docente puedan usar.



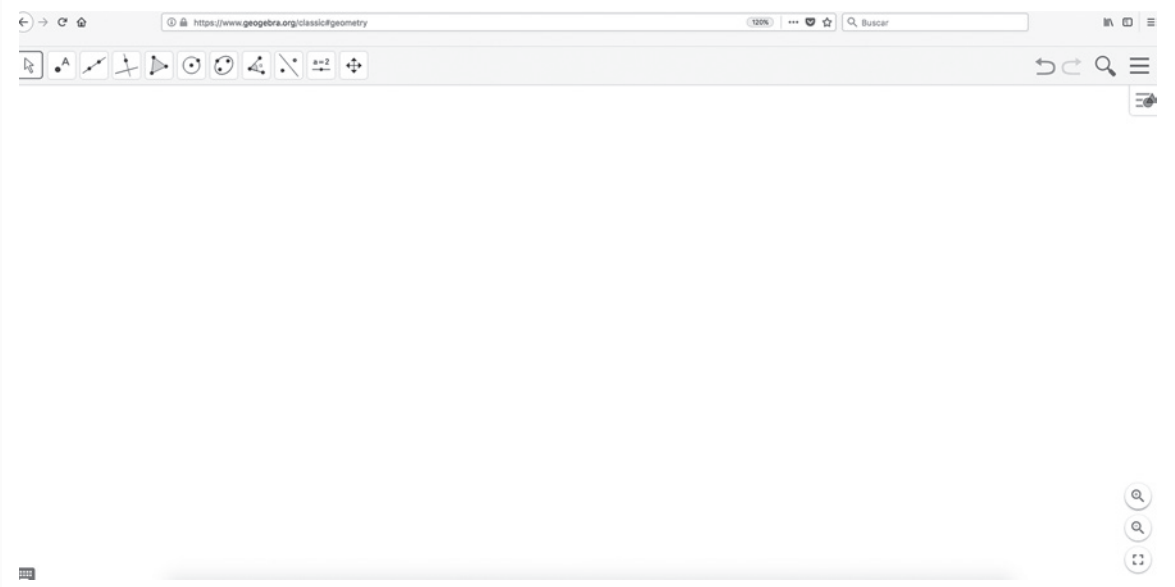
Si se usa GeoGebra Clásico, será conveniente, para comenzar, solicitarles a los alumnos que oculten los ejes seleccionando la opción "Geometría" en la ventana que aparece desplegada al abrirlo.



También es posible ocultar los ejes y la cuadrícula haciendo clic con el botón derecho del *mouse* para optar por quitar “Ejes” y “Cuadrícula”.



Entonces, quedará la página en blanco para trabajar:



Si se descarga el programa GeoGebra Geometría, este paso no será necesario.

III. Organización de la enseñanza prevista en este libro

Se propician **diversas modalidades de organización de la clase** en función de las variadas formas que puede adquirir el trabajo matemático, del nivel de conocimientos que el problema involucra y del tipo de interacciones que se pretende promover.

Todos los capítulos inician con una **portada de trabajo colectivo** que busca traer a la escena del aula prácticas matemáticas ligadas al contenido del capítulo y que se utilizaron o se utilizan en diferentes culturas. La intención de estas páginas es introducir a los alumnos en la génesis de algunos conceptos matemáticos que ellos conocen o estudiarán, analizar ciertos usos que pueden tener algunas ideas matemáticas en las sociedades actuales, tomar contacto con la diversidad cultural matemática reconociendo formas distintas de representar, de resolver, de nombrar objetos matemáticos, y tomar conciencia de que las matemáticas están vivas y en permanente transformación. Se busca que los alumnos puedan además **conocer y valorar la producción cultural** de esta disciplina en **diferentes comunidades actuales o pasadas**.

La primera parte de estas portadas ofrece información para leer e interpretar entre todos bajo el título "Cosas de Mate de aquí y allá...", e incluye relatos, datos, fotografías e imágenes para acercar la información a los alumnos.

A continuación se plantean algunos interrogantes asociados con los objetos o tipos de práctica presentados que involucran cierto trabajo matemático por parte de los alumnos. Este apartado está encabezado por el título "Para pensar entre todos".

PARA PENSAR ENTRE TODOS

Luego de la portada se propone una variedad de situaciones. Algunas de ellas están dirigidas a una **exploración individual**, de manera que cada alumno pueda enfrentarse a los problemas desde los conocimientos que tiene disponibles. Estos primeros acercamientos a la resolución serán puntos de partida para el análisis colectivo posterior.

En otras oportunidades se sugiere abordar algunos problemas **en parejas**, y se anuncia con el ícono De a dos cuando se espera que las interacciones entre los alumnos sean fecundas para la circulación y la explicitación de conocimientos. Esta modalidad es adoptada cuando la propuesta es un poco más compleja o más exploratoria y, por lo tanto, busca promover intercambios entre los estudiantes. En otros casos la propia actividad demanda la interacción para ser resuelta.

Dentro del capítulo también hay instancias en las que se propicia un **trabajo colectivo**. Algunas se anuncian con el ícono En grupos y otras están presentes en los problemas finales de cada página o doble página. En esta sección las actividades aparecen con diferentes títulos, por ejemplo:

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

INVENTAR PROBLEMAS ENTRE TODOS

REVISAR MANERAS DE RESOLVER ENTRE TODOS

GENERALIZAR ENTRE TODOS

ELABORAR EXPLICACIONES ENTRE TODOS

ELABORAR CONCLUSIONES ENTRE TODOS

COMPARAR ÁREAS ENTRE TODOS

ANALIZAR LA VALIDEZ DE UNA AFIRMACIÓN ENTRE TODOS

ANALIZAR LA VALIDEZ DE IGUALDADES ENTRE TODOS

En estas secciones la tarea que se propone puede **involucrar una complejidad mayor, cierta sistematización de conocimientos, un reordenamiento de la producción o avanzar en procesos de generalización**. Se pretende continuar con el desarrollo de una práctica que ponga en debate los alcances de un recurso o de una relación, la posibilidad de identificar dominios de validez de ciertas relaciones, abonar a la práctica algebraica o profundizar en el estudio de objetos matemáticos, haciendo explícita y frecuente la idea de **generalización**.

También se prevén como **instancias colectivas** los momentos para **establecer o recuperar cierto vocabulario**, para **definir objetos o propiedades o volver sobre ellas,** para **proponer formas de representación** o para **presentar fundamentaciones** sobre alguna relación matemática un poco más compleja para la cual los estudiantes aún no están en condiciones de producir una demostración. Estas informaciones aparecen encabezadas así:

PARA LEER ENTRE TODOS

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

En algunas oportunidades se propone que los estudiantes resuelvan el problema en sus carpetas. Estas actividades aparecen con el ícono .

Antes de finalizar cada capítulo se incluye una página, también colectiva, que apunta a un **retorno reflexivo sobre el estudio desarrollado y la producción realizada**. Estas páginas se titulan:

RECAPITULAR ENTRE TODOS

El propósito es ofrecer un conjunto de actividades que permitan a los estudiantes **revisar los problemas resueltos** y las ideas utilizadas a la luz de cierto trayecto recorrido. Se trata de que tengan una nueva oportunidad de **retomar sus resoluciones, analizar los procedimientos empleados**, **y distinguir y sistematizar las cuestiones que deben retener** como fruto del trabajo en clase. Seguramente el docente deberá gestionar momentos iniciales de trabajo individual o en parejas para luego dirigir un espacio colectivo de debate y síntesis que permita ordenar las situaciones que aquí se plantean. Es probable que el desarrollo de estas actividades propicie la construcción de nuevas relaciones y nuevos conocimientos. Este trabajo es abordado por medio

de diferentes tipos de actividades: retomar dificultades, comparar estrategias, clasificar problemas, analizar errores que pudieron haber aparecido, explicitar formas de resolución, volver a resolver un problema similar a los ya resueltos pero buscando generalizar algún procedimiento, etcétera.

Luego de esta página se proponen algunos "PROBLEMAS PARA ESTUDIAR", encabezados así:

Se trata de una selección de actividades muy similares a las ya tratadas en el capítulo, pero en este caso con la intención de que los alumnos puedan **retomar el trabajo realizado** y **afianzar los conocimientos** puestos en juego durante los procesos de resolución y análisis de estrategias y soluciones halladas. Esta instancia de práctica y ejercitación forma parte del proceso de estudio individual y puede articularse con la página de "Recapitulación".

En ocasiones ocurre que el docente inicia el abordaje de un nuevo contenido con los primeros problemas del capítulo e identifica que algunos alumnos –o todos– no recuerdan ciertas ideas o recursos, o bien no disponen de los conocimientos necesarios para poder abordarlos. En dichos casos se podrá apelar a la colección de problemas que se presentan bajo el siguiente título.

En estas páginas, el libro ofrece al docente un conjunto de actividades fotocopiables pensadas para aquellos alumnos que precisan recuperar conocimientos tratados en años anteriores antes de continuar avanzando con las situaciones incluidas en el capítulo. El docente podrá incluso seleccionar algunos de los problemas para presentárselos a todos los estudiantes, a modo de indagación de conocimientos disponibles o para repasar antes de abordar el capítulo.

En otras ocasiones sucede que algunos estudiantes logran alcanzar los objetivos del tema abordado en un capítulo con mayor facilidad o en menos tiempo que sus compañeros. Para estos casos, en las páginas siguientes se ofrece al docente una serie de actividades asociadas con el contenido del capítulo pero con mayor nivel de complejidad que la propuesta en el libro de los alumnos. Se trata de los problemas así encabezados:

No se espera que los alumnos resuelvan todos esos problemas en el mismo momento ni en la misma clase, dado que muchos de ellos involucran una relación más próxima con los contenidos del año siguiente; por el contrario, se busca que funcionen como un recurso administrado por el docente en función de la particularidad de cada alumno y de cada clase.

Capítulo 1: Números naturales y operaciones

1 Completá la tabla, teniendo en cuenta que en todas las cajas hay la misma cantidad de alfajorcitos.

Cantidad de cajas	12	18	24	36	48	90	144	216
Cantidad de alfajorcitos			120					

2 Usando que $30 \times 24 = 720$, y sin resolver las multiplicaciones, hallá el producto en cada caso. Luego usá la calculadora para verificar.

a) $30 \times 12 =$
b) $90 \times 8 =$
c) $300 \times 240 =$
d) $31 \times 48 =$
e) $30 \times 23 =$
f) $30 \times 34 =$

3 Esta serie de figuras está formada por cuadraditos blancos y grises.

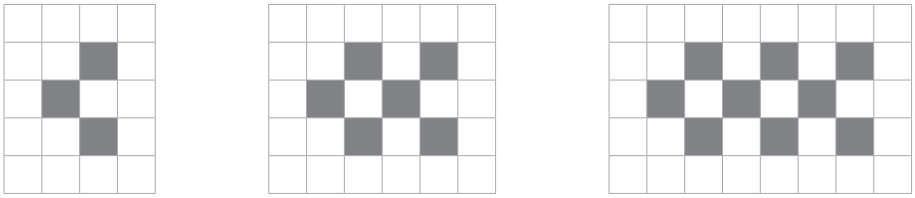


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

a) Dibujá las figuras 4 y 5 de la secuencia.
b) ¿Cuántos cuadraditos grises habrá en la figura 7? ¿Y en la figura 23?
c) Decidí si la fórmula 3**n**, en la que **n** representa el número de figura en la serie, permite averiguar la cantidad de cuadraditos grises necesarios para armarla. Explica por qué.

4 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 5, 7 y 8 si se los puede repetir?

5 Calculá.

$3^2 =$ $2^3 =$ $4^2 =$ $2^4 =$

$\sqrt{36} =$ $\sqrt{64} =$ $\sqrt{25} =$ $\sqrt{81} =$

Capítulo 1: Números naturales y operaciones

1 Si hoy es miércoles, ¿qué día de la semana será dentro de 600 días?

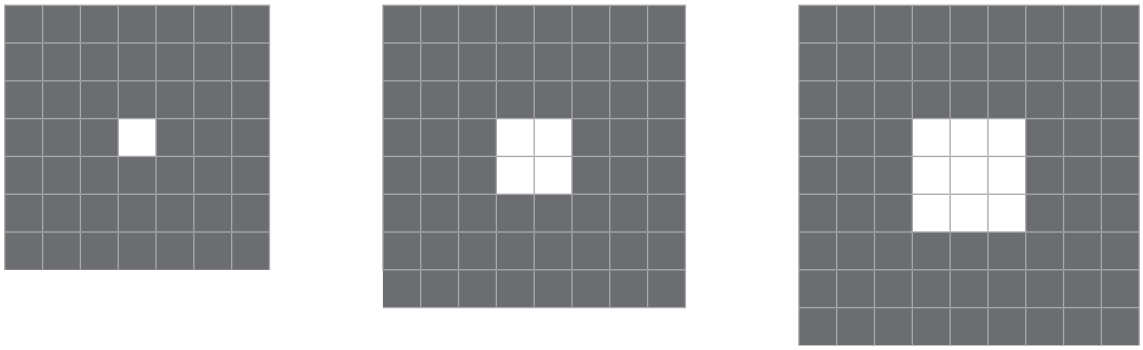
2 Usando que 15 × 48 = 720, y sin realizar las multiplicaciones y las divisiones, resolvé los siguientes cálculos.

a) 45 × 8 =
b) 30 × 24 =
c) 45 × 24 =
d) 30 × 8 =
e) 720 : 15 =
f) 720 : 30 =

3 Dada la expresión 4**n** + 9 = 53, ¿para cuáles de los siguientes valores de **n** se convierte en una igualdad verdadera y para cuáles en una falsa: **n** = 2, **n** = 7, **n** = 11?

4 Se propone la siguiente sucesión de figuras construidas de esta manera: al cuadrado blanco central se lo rodea con tres vueltas de cuadrados grises. Buscá una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadrados grises en función de los cuadraditos que tiene el lado del cuadrado blanco central.

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**



5 Manuel inicia un grupo de WhatsApp, incorpora a dos amigos y los hace administradores. Cada uno de ellos incluye a otros dos de la misma forma, y a su vez, cada uno agrega a otros dos. ¿Cuántas personas forman el grupo?

6 Para decorar una pared se van a hacer dos cuadrados de distinto tamaño usando venecitas cuadradas de dos colores. Para el cuadrado grande se usarán 14 filas de venecitas verdes, y para el cuadrado chico, 8 filas de venecitas celestes. Escribí un cálculo que permita saber cuántas venecitas se utilizarán en total.

Capítulo 2: Números enteros

1 La botonera de un ascensor es como se ve en el dibujo. La planta baja se indica con el número cero. Hay tres pisos debajo de la planta baja, para estacionamiento.

a) Camila tomó el ascensor en –1 y fue hasta el cuarto piso. ¿Cuántos pisos subió?

b) Micaela subió 8 pisos y llegó a su departamento, en el quinto piso. ¿En qué piso lo tomó?

2 a) En un juego de mesa, Camilo se encuentra en la posición marcada con gris. Indicá sobre el tablero los lugares que va ocupando al seguir estos movimientos:

- Avanza 1 casillero.
- Retrocede 2 casilleros.
- Avanza 5 casilleros.
- Retrocede 3 casilleros.

b) Si los casilleros del juego estuviesen numerados, indicá los números de los casilleros a los que llegaría en cada caso.

–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

- Avanza 3 casilleros.
- Retrocede 4 casilleros.
- Retrocede 2 casilleros.
- Avanza 5 casilleros.

3 En el fútbol es importante conocer cuál es la diferencia entre la cantidad de goles a favor y de goles en contra. En la primera división "A" de la Liga Cordobesa de Fútbol Femenino, Belgrano tiene 19 goles a favor y 2 en contra, con una diferencia de goles de 17. Completá la tabla con los datos que faltan. Podés usar la calculadora para comprobar.

EQUIPO	GF	GC	DIF.
BELGRANO	19	2	17
RACING	23	2	
UNIVERSITARIO	16		11
Bº PARQUE		3	7
MEDEA CLUB	4	6	-2
ALL BOYS	5	8	
GRAL. PAZ JUNIORS	5		-6
ARG. PEÑAROL		12	-9
LAS PALMAS	2	8	

4 La temperatura al anochecer en una ciudad fue de –3 grados. A la medianoche ese valor se había duplicado. ¿Cuánto marcaba el termómetro?

5 Juan debe $100 en el kiosco de la escuela. Retira dos alfajores que cuestan $40 cada uno y los anota para pagar otro día. ¿Cuánto debe Juan?

6 Calculá.

a) $(-5)^2 =$ b) $(-4)^3 =$ c) $\sqrt{121} =$ d) $\sqrt[3]{-125} =$

1. La Edad Antigua va desde el año −3000 hasta el 476. ¿Cuántos años abarca?

2. Marcá en una recta numérica dónde están ubicados todos los números cuyos opuestos sean menores que −5.

3. ¿Cuáles son algunos valores posibles para el número **m** que hagan verdadera cada una de las siguientes expresiones? ¿Cómo harías para encontrarlos todos?

   a) $\mathbf{m} + (-5) < -10$

   b) $4 - (-\mathbf{m}) < 14$

   c) $\mathbf{m} - 3 > -1$

4. Decidí cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, si **m** es un número entero que verifica que $\mathbf{m} \cdot (-4) < 4$.

   a) El número **m** debe ser menor que −1.

   b) El número **m** debe ser mayor que −1.

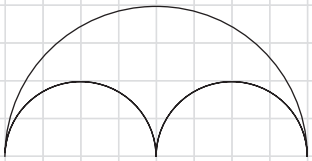
   c) El número **m** debe ser mayor o igual que 0.

5. ¿Qué condición tiene que cumplir el número entero **m** para que la división entre $(4 + \mathbf{m})$ y 7 tenga resto cero? ¿Hay una única opción?

6. ¿Es cierto que la suma de cinco números enteros consecutivos siempre da un número par? ¿Y un número múltiplo de 5?

Capítulo 3: Geometría I

1 Copiá esta figura utilizando los instrumentos de geometría que necesites.



2 a) Construí un triángulo ABC que tenga:
- el lado AB de 5 cm;
- el ángulo BAC de 80°;
- el lado AC de 3 cm.

b) Con las mismas instrucciones del ítem a), ¿se puede construir un triángulo distinto al que dibujaste?

c) ¿Es cierto que $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo acutángulo? ¿Es isósceles?

3 a) Construí un triángulo isósceles que tenga lados de 4 cm y de 3,5 cm.

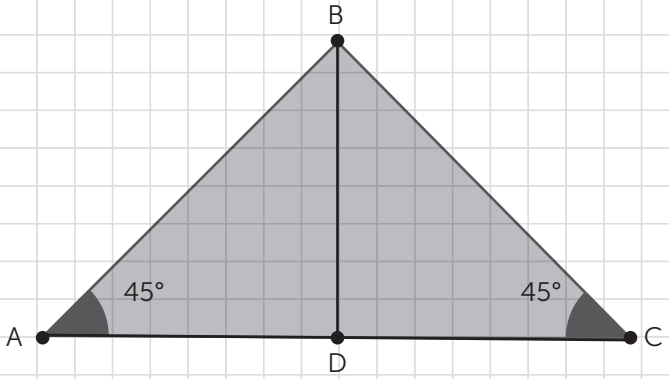
b) ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan con las condiciones dadas en el ítem a) se pueden construir?

4 A partir de la siguiente figura, respondé estas preguntas, sin medir.

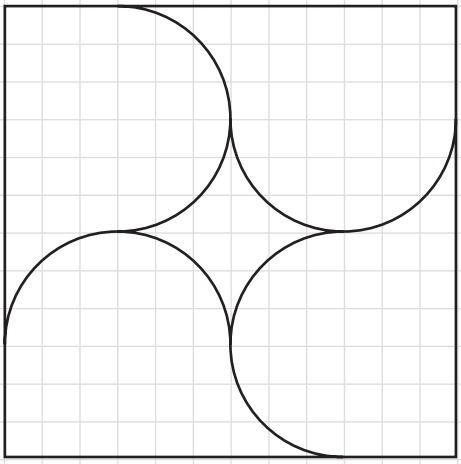
a) ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

b) Si $\overline{DB}$ es la altura correspondiente al lado AC, ¿cuánto mide $D\hat{B}C$?

c) ¿Cómo se puede justificar, usando algún criterio de congruencia, que $\overset{\Delta}{ABD}$ y $\overset{\Delta}{DBC}$ son congruentes?

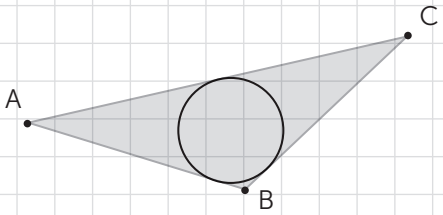


1 Copiá esta figura utilizando los instrumentos de geometría que necesites.



2 ¿Cómo se puede dibujar una circunferencia que pase por tres puntos no alineados? Si vas a resolver este problema en GeoGebra, no uses la herramienta "circunferencia por tres puntos".

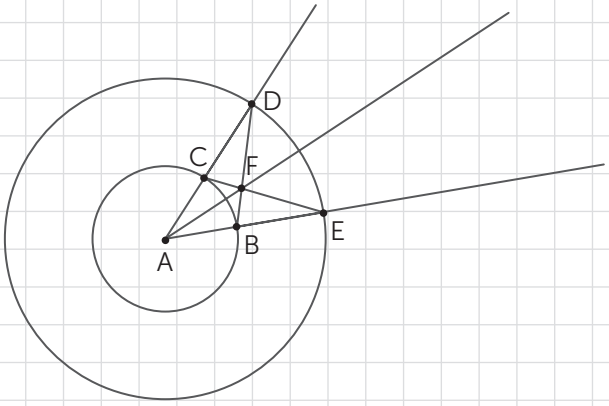
3 En la siguiente figura está dibujada la circunferencia inscripta en el triángulo ABC, es decir, la circunferencia más grande contenida en él, que interseca a cada lado exactamente en un punto.



a) Explicá cómo puede hallarse el centro de la circunferencia.

b) En GeoGebra, construí un triángulo y la circunferencia inscripta en él. Para construir esta circunferencia utilizá la herramienta "circunferencia por tres puntos".

4 En la siguiente figura, A es el centro de las circunferencias dibujadas y el vértice del ángulo EAD.
Los puntos B, C, D y E son intersecciones de los lados de dicho ángulo con las circunferencias.
F es la intersección de los segmentos CE y DB.
La semirrecta que contiene a $\overline{AF}$ es bisectriz de $E\hat{A}D$.
¿Es cierto que los triángulos CDF y BFE son congruentes? Decidilo sin realizar mediciones.



Capítulo 4: Números racionales I

1 a) María quiere repartir 5 barras de cereal entre 4 compañeros de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

b) Ahora quiere repartir 10 barras de cereal entre 8 compañeros. ¿A cada uno le tocará más, menos o la misma cantidad que recibieron las personas de la parte a)?

c) Y si fueran 15 barras de cereal, ¿entre cuántos compañeros habría que repartirlas para que cada uno recibiera la misma cantidad que en la parte a)?

2 Esta tira representa una unidad.

Dibujá una tira que mida lo que se indica en cada caso.

a) $\frac{1}{2}$ de la unidad.

b) $\frac{1}{4}$ de la unidad.

c) 3 veces la unidad.

d) $1\frac{1}{2}$ de la unidad.

3 En cada caso, indicá la o las respuestas correctas.

a) El doble de $\frac{1}{4}$ es:

$\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{8}$

b) La mitad de $\frac{2}{8}$ es:

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{4}$

4 Julia está organizando su fiesta de cumpleaños y necesita saber cuánto helado comprar. Calcula $\frac{1}{4}$ kg de helado para cada invitado.

a) Si vienen dos invitados, ¿cuántos kilos de helado necesita?
b) ¿Y si son 4 invitados?
c) ¿Y si vienen 6 invitados?
d) ¿Y si son 10 invitados?
e) ¿Y si vienen 5 invitados?
f) Si compra 8 kg de helado, ¿para cuántos invitados alcanza?

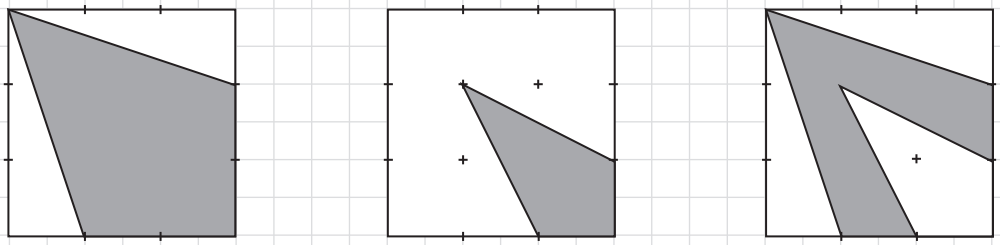
5 Decidí si son verdaderas las siguientes afirmaciones.

a) El 50% de 1.400 es 700.
b) El 50% de 800 es la mitad de 800.
c) El 25% de 40 es 10.
d) El 25% de 40 es su cuarta parte.

1 Escribí 3 fracciones equivalentes a cada fracción dada.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{10}{15}$

2 ¿Qué fracción del cuadrado representa la parte gris en cada uno de los casos?



3 En una pequeña empresa trabajan 36 personas, distribuidas en los distintos sectores de la forma que se detalla en el cuadro. ¿Cuántas personas trabajan en cada sector, incluido el de Limpieza?

Ejecutivos	$\frac{1}{9}$
Administrativos	$\frac{1}{6}$
Operarios	$\frac{1}{2}$
Seguridad e Higiene	$\frac{1}{12}$
Limpieza	

4 Agustina cobró $50.000 en el mes de septiembre. En su trabajo le informan que en octubre cobrará un aumento del 15% de su sueldo actual y que en noviembre tendrá un nuevo aumento del 10% sobre el sueldo de octubre. ¿Es verdad que en noviembre cobrará 25% más que el sueldo de septiembre?

5 a) ¿Será cierto que al calcular el 20% de 60 se obtiene el mismo resultado que al calcular el 60% de 20?

b) ¿Y el 25% de **X** será igual que el **X**% de 25?

Capítulo 5: Funciones

1 El armado de una bicicleta fija demanda 16 tornillos con sus respectivas tuercas. Lucas, el bicicletero, intenta elaborar una tabla que le permita saber qué cantidad de tornillos necesita para armar cierto número de bicicletas.

a) Completá la tabla.

Cantidad de bicicletas	2	4	6	7	10	12	14
Cantidad de tornillos							

b) Cada caja de tornillos de las que compra Lucas contiene 100 unidades. ¿Cuántas bicicletas puede armar utilizando solamente una caja? ¿Le sobran tornillos? ¿Cuántos?

c) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas permiten calcular la cantidad **T** de tornillos necesarios para armar una cantidad **B** de bicicletas?

$\mathbf{B} = 16 \cdot \mathbf{T}$ $\qquad$ $\mathbf{T} = 16 \cdot \mathbf{B}$ $\qquad$ $\mathbf{T} = 16$ $\qquad$ $\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{B}} = 16$

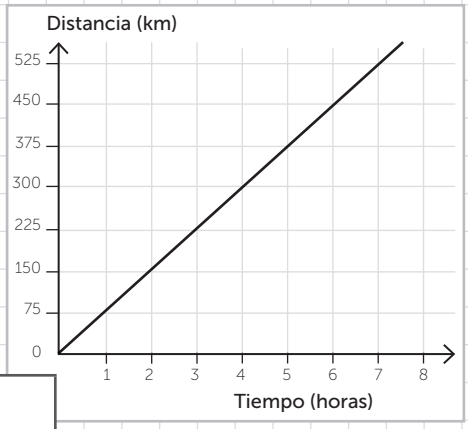
2 El gráfico representa la distancia que recorre un vehículo en un tiempo determinado viajando siempre a la misma velocidad.

a) ¿Es cierto que en 2 horas recorre 150 km? ¿En qué parte es posible leer esa información?

b) ¿Qué distancia recorre en 4 horas? Marcá el punto en el gráfico que permite obtener esta información.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 375 km? Marcá el punto en el gráfico que permite obtener esta información.

d) Completá la tabla con datos del gráfico y con otros que puedas calcular a partir de ellos suponiendo que el vehículo sigue viajando a la misma velocidad.



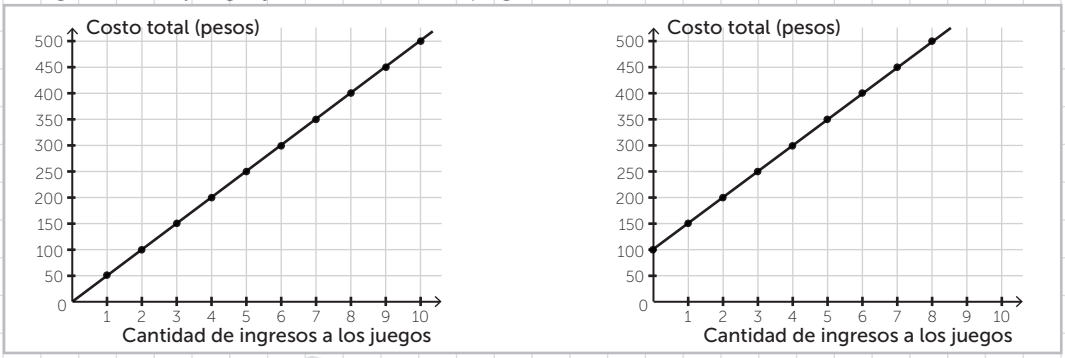
Tiempo (en horas)	1	3	5			
Distancia (en km)				450	525	750

3 Un parque de diversiones cobra una entrada fija de $100 más $50 por el ingreso a cada juego.

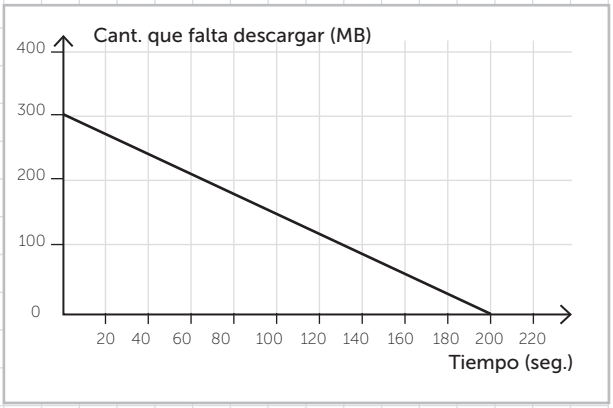
a) ¿Cuánto dinero deberá llevar Trinidad si quiere ingresar a 7 juegos?

b) Joaquín ahorró $600 en sus vacaciones. ¿A cuántos juegos podrá acceder como máximo?

c) ¿Cuál de los siguientes gráficos podría representar mejor la relación entre la cantidad de veces que se ingresa a un juego y el costo total a pagar?



1 Nicolás descargó un video de internet con una velocidad de transferencia constante. El gráfico representa la cantidad de megabytes que faltaban descargar del archivo en función del tiempo que duró el proceso.



a) ¿Cuál fue la velocidad de transferencia de la descarga?
b) ¿Cuál es el dominio de la función representada en el gráfico? ¿Y la imagen?
c) Si la velocidad de descarga hubiera sido de 2 MB por segundo, ¿cambiaría el dominio de la función? ¿Y la imagen?
d) ¿Cuál debería ser la velocidad de descarga para que el dominio de la función fuera [0; 100]?

2 La fórmula $f(\mathbf{x}) = \frac{1.500}{\mathbf{x}}$ representa el tiempo que tarda en llenarse una pileta en función de la cantidad de agua que deja pasar la canilla. A la derecha se muestra el gráfico de la función.

a) ¿Cuál es la capacidad de la pileta?
b) Hallá el dominio y la imagen de *f*.
c) Hallá, si fuera posible, valores de **x** que verifiquen las ecuaciones:
- $f(\mathbf{x}) = 20$
- $f(\mathbf{x}) = 30$

d) ¿Cómo se pueden interpretar las ecuaciones del ítem c) y sus soluciones en el contexto del problema?

3 Se sabe que las coordenadas de los puntos (**x**; **y**) se relacionan mediante la fórmula $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{k}$, donde **k** representa un número entero.
a) Si **k** es un número positivo, ¿es cierto que todos los puntos (**x**; **y**) se ubican en el primer cuadrante?

b) ¿En qué cuadrantes se encuentran los puntos (**x**; **y**) si **k** es un número negativo?

c) Realizá el gráfico que representa la relación cuando **k** = 1.

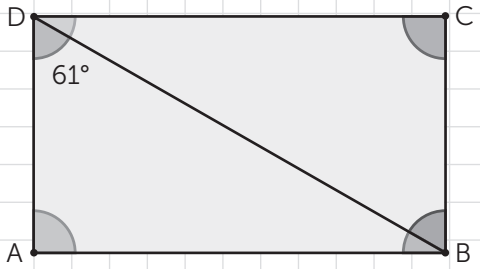
4 La fórmula $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}}$ representa una relación funcional entre dos cantidades.
a) ¿Hay algún valor que no pueda tomar la variable **x**?

b) Representá la función con un gráfico cartesiano.

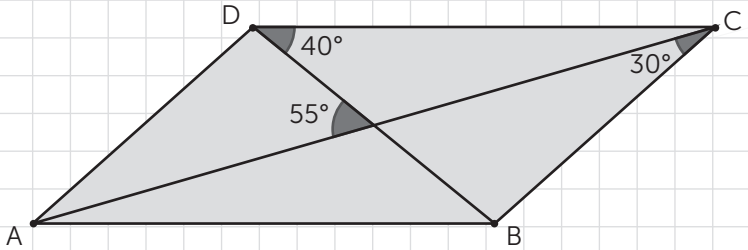
c) Hallá su dominio y su imagen.

Capítulo 6: Geometría

1 Sin realizar mediciones, indicá cuánto miden los ángulos marcados en el rectángulo.

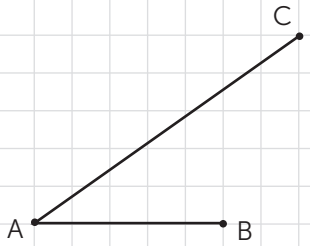


2 Hallá la medida de todos los ángulos del paralelogramo.



3 Dibujá un rombo que tenga una diagonal de 3 cm y otra de 4 cm.

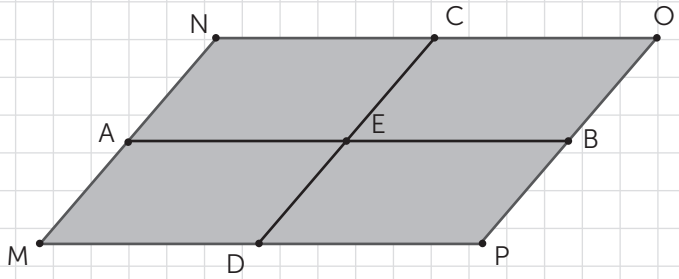
4 Completá la figura para que quede dibujado un paralelogramo.



5 En esta figura, el cuadrilátero MNOP es un paralelogramo y A, B, C y D son puntos medios de cada uno de sus lados.
Sin realizar mediciones:

a) Explicá cómo se puede saber que los cuatro cuadriláteros que se forman son paralelogramos.

b) Si el ángulo con vértice en M mide 57°, encontrá las medidas de todos los ángulos de la figura.



1 En un paralelogramo DEFG, $\hat{E}$ mide el triple que $\hat{D}$. ¿Es posible averiguar la amplitud de cada uno de los ángulos del paralelogramo?

2 Si se trazan las bisectrices de todos los ángulos interiores de un paralelogramo que no es rombo, queda determinado un cuadrilátero. ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Es posible que quede determinado un cuadrado?

3 En una hoja lisa, construí un rombo de manera que la medida de un ángulo interior sea el doble de la de su consecutivo. Si vas a resolver este problema usando GeoGebra, para la construcción del rombo no utilices la herramienta "ángulo dada su amplitud".

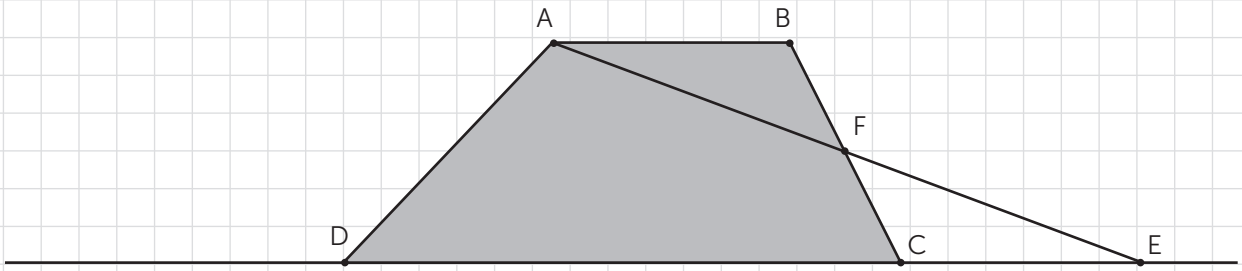
4 Construí un trapecio isósceles que esté inscripto en una circunferencia, de modo que una de sus bases sea un diámetro. ¿Cómo se puede saber, sin medir, que los lados no paralelos son congruentes?

5 En la siguiente figura, el cuadrilátero ABCD es un trapecio que no es isósceles, $\overline{AB} // \overline{CD}$, E es un punto sobre la recta que contiene a $\overline{CD}$ y F es la intersección de $\overline{BC}$ con $\overline{AE}$.
Se sabe que $\overline{AB}$ tiene la misma medida que $\overline{CE}$.

a) Sin medir, decidí si F es punto medio de $\overline{BC}$ y de $\overline{AE}$.

b) Marcá sobre la recta que contiene a $\overline{CD}$ un punto G, de forma tal que $\overline{BG}$ corte a $\overline{AD}$ en su punto medio.

c) Decidí si es cierto que los cuadriláteros ABEC y ABDG son congruentes.



Capítulo 7: Números racionales II

1 ¿Cuántos décimos tiene cada uno de los siguientes números?

a) 1,10 b) 3,5 c) 7,25 d) 8,05

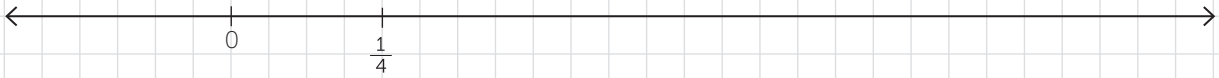
2 ¿Qué número se forma en cada caso?

a) $7 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}01 =$

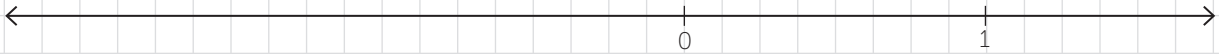
b) $7 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} =$

c) $0{,}7 + 0{,}05 =$

3 Ubicá el número 1 en esta recta numérica.



4 Ubicá en esta recta los siguientes números: $\frac{1}{2}$; -2; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{8}$.



5 Decidí si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{6}{8}$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \frac{1}{243}$

6 Encontrá un número que elevado al cubo dé $\frac{8}{125}$.

7 a) Ordená de menor a mayor los siguientes números.

$\frac{9}{2}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; 1.

b) Intercalá en la lista anterior los números 0,4 y $\frac{4}{5}$ de manera que siga ordenada.

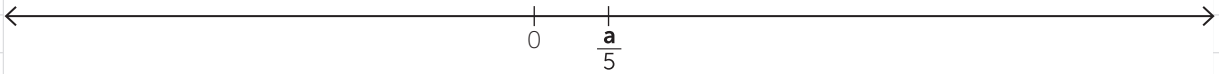
c) Elegí dos de los números propuestos y escribí distintas fracciones que se encuentren entre ellos.

1 Encontrá, si fuera posible, un número racional **a**, de manera que el número **a** + 0,00001 sea entero.

2 Al resolver el cálculo 68 : 48 con dos calculadoras diferentes, en una apareció como resultado 1,41666666666 y en la otra, 1,41666666667.

a) ¿Cómo explicarías la diferencia?
b) ¿Cuál es el resultado exacto?

3 Si **a** es un número positivo cualquiera y se representa en la recta $\frac{a}{5}$, ubicá **a**; –**a** y $\frac{a}{3}$.



4 A partir de un cuadrado inicial se construye otra figura cuyos vértices son los puntos medios de dicho cuadrado. Tomando como base esta nueva figura se construye una tercera, nuevamente a partir de los puntos medios. Este proceso puede continuar indefinidamente.

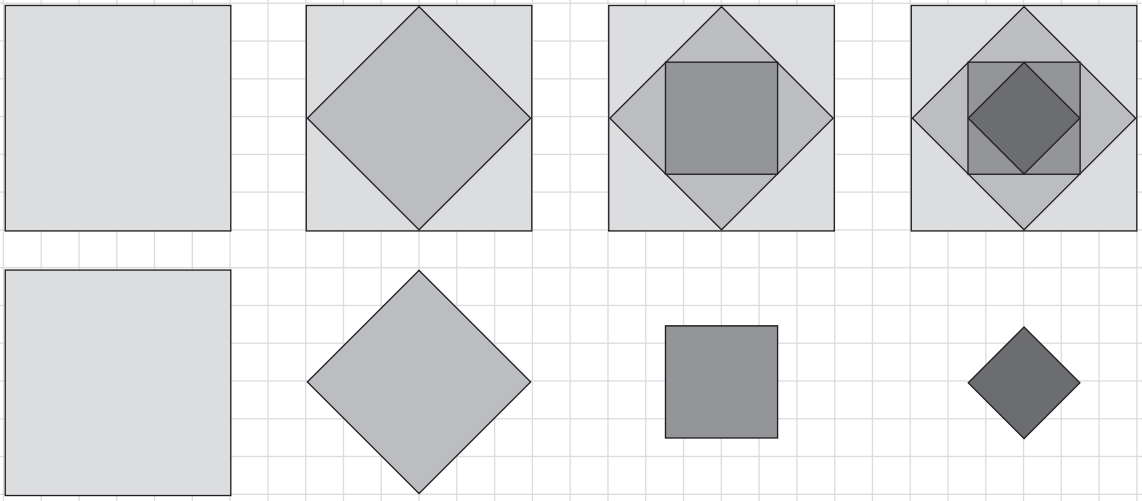


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) ¿Qué parte del cuadrado inicial es la segunda figura? ¿Y la tercera?

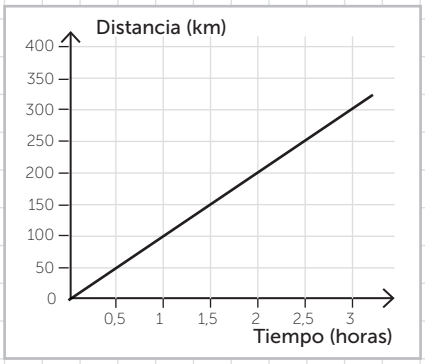
b) Si se reitera esta construcción, ¿qué parte del área del cuadrado inicial serán los cuadrados obtenidos?

5 ¿Es verdad que $\frac{91}{1.000}$ es la primera fracción después de $\frac{1}{11}$?

6 ¿Para qué valores enteros de **m**, $\frac{1}{m}$ es mayor que $\frac{1}{5}$?

Capítulo 8: Función lineal

1 El siguiente gráfico representa la distancia que recorre un tren que viaja entre dos ciudades.



a) ¿Qué distancia recorre en 1 hora? ¿Y en 2 horas?
b) ¿Cuánto tarda en recorrer 300 km?
c) ¿A qué velocidad se desplaza?

2 Una empresa constructora necesita comprar bolsas de cemento, que cuestan $500 cada una.

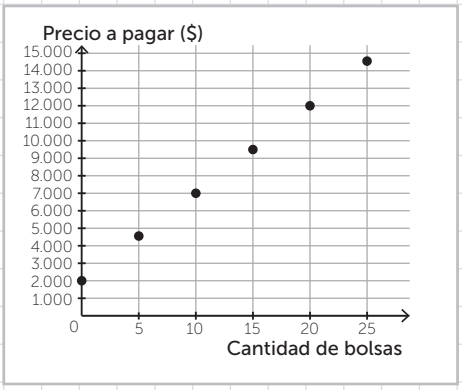
a) Completá la tabla con los precios que deberá pagar dependiendo de la cantidad de bolsas que compre.

Cantidad de bolsas	5	10	20	25
Precio a pagar ($)				

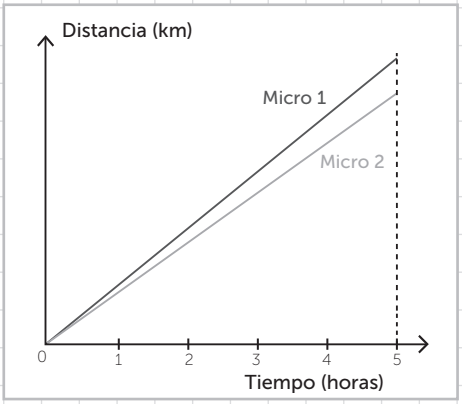
b) El negocio que le vende el cemento le cobra un monto fijo de $2.000 por llevar las bolsas hasta la construcción. Completá la tabla con los precios que deberá pagar incluyendo el costo del transporte.

Cantidad de bolsas	5	10	20	25
Precio total a pagar (incluyendo el transporte) ($)				

c) ¿Cuál de las dos situaciones está mejor representada por este gráfico? ¿Qué representa cada uno de los puntos que están marcados?

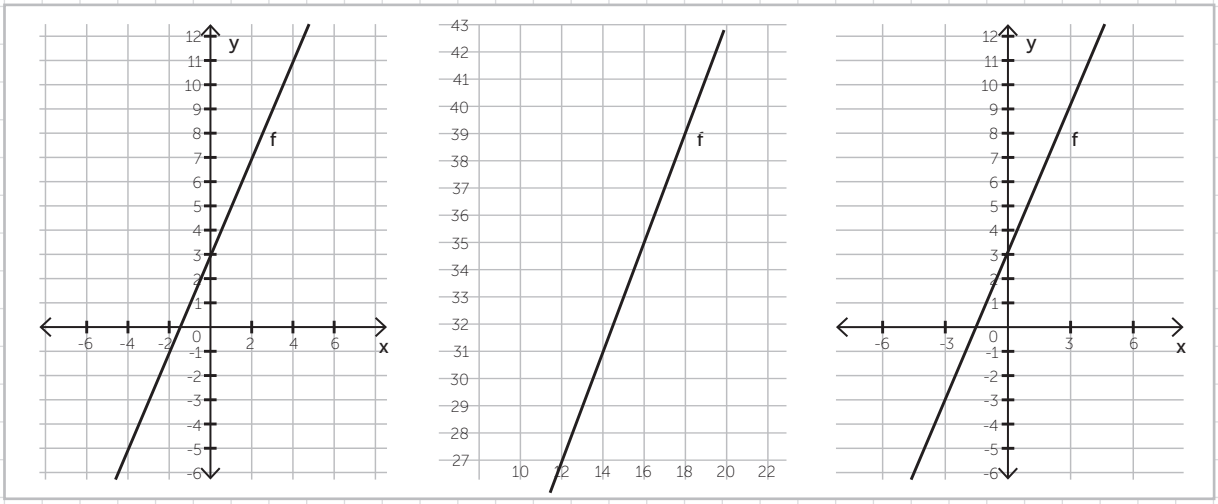


3 Dos micros salen de una terminal a la misma hora, a una velocidad constante, rumbo al Partido de la Costa.
A continuación se muestra un gráfico que representa la distancia recorrida en función del tiempo por cada uno de los ómnibus.



a) ¿Se puede saber cuál de los dos circulaba a mayor velocidad?
b) Si se sabe que el micro 1 recorrió en total 400 kilómetros, ¿a qué velocidad se desplazó?

1 Explicá por qué los tres gráficos representan la misma función lineal y hallá su fórmula.



2 Realizá los gráficos de las funciones $f(\mathbf{x}) = \frac{6\mathbf{x} - 10}{2}$ y $g(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} - 5$.

a) ¿Es cierto que son la misma función?

b) Explicá cómo se podría obtener la fórmula de *g* a partir de la fórmula de *f*.

c) Hallá la pendiente y la ordenada al origen de *f*.

3 El dominio de una función es el intervalo [0; 4], su imagen es el intervalo [1; 7] y su gráfico es un segmento de recta.

a) Realizá un posible gráfico de la función.

b) Hallá una posible fórmula de la función. ¿Habrá otra fórmula diferente? Si creés que sí, escribila y efectuá su gráfico. Si creés que no, explicá por qué.

4 En el comedor de un hotel hay un termo con una capacidad de 14 litros que contiene leche. Al ponerlo sobre una balanza y llenarlo con diferentes cantidades de leche, se registraron los siguientes pesos.

Volumen de leche (en litros)	2	7
Peso del termo con leche (en kilos)	5,06	10,21

a) ¿Cuánto pesa 1 litro de leche?

b) ¿Cuánto pesa el termo vacío, sin leche? ¿Y lleno?

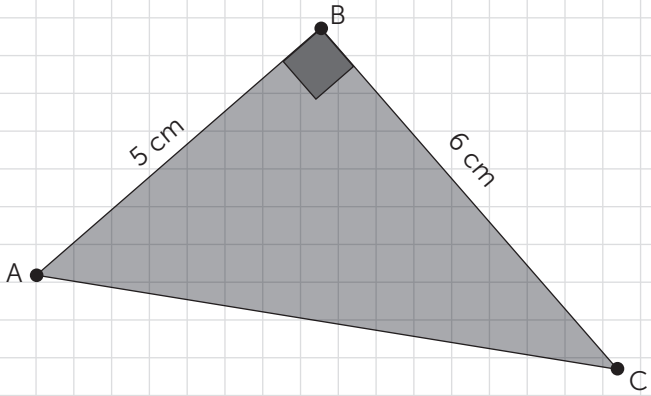
c) Hallá una fórmula que permita calcular el peso del termo en función de la cantidad de leche que contiene.

d) Hallá una fórmula que permita calcular la cantidad de leche que contiene el termo en función de su peso.

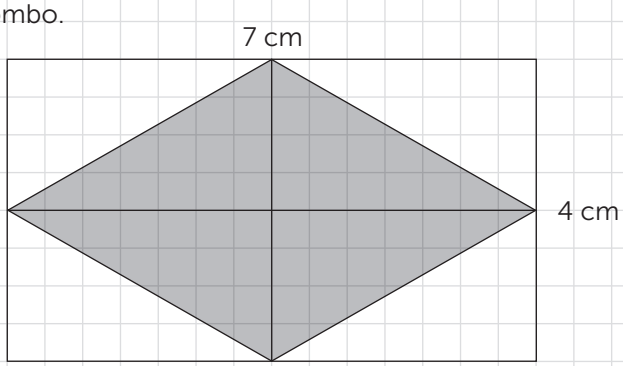
Capítulo 9: Teorema de Pitágoras

1 ¿Cuál es el área de este rectángulo?

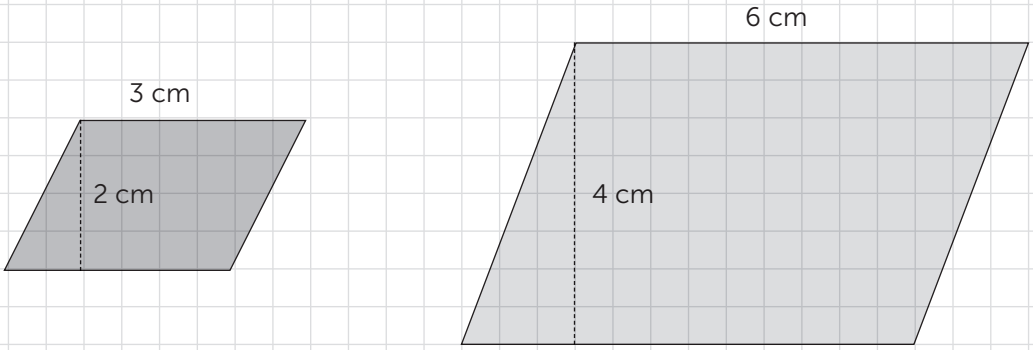
2 Calculá el área del triángulo ABC sabiendo que es un triángulo rectángulo.



3 Calculá el área del siguiente rombo.

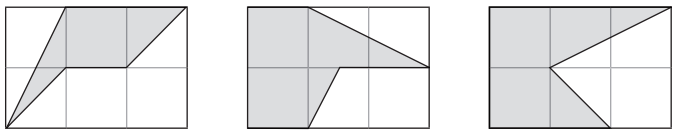


4 El paralelogramo mayor fue dibujado modificando la altura y la base del paralelogramo menor. ¿Es cierto que el área del paralelogramo mayor es el doble que la del paralelogramo menor?



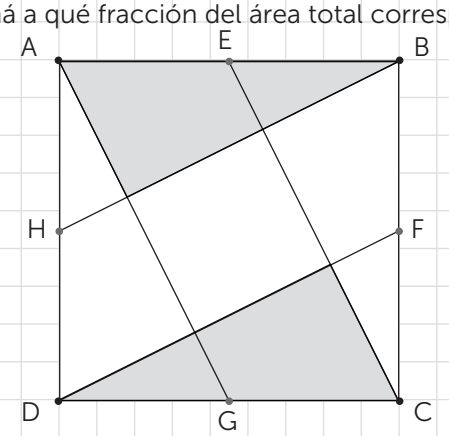
5 Considerá los puntos A = (2; 5), B = (6; 3) y C = (3; 3). ¿Es verdad que la distancia entre A y B es igual que la distancia entre B y C?

1 ¿Cuál de estas figuras tiene el área sombreada mayor? ¿Y cuál tiene la menor área sombreada?

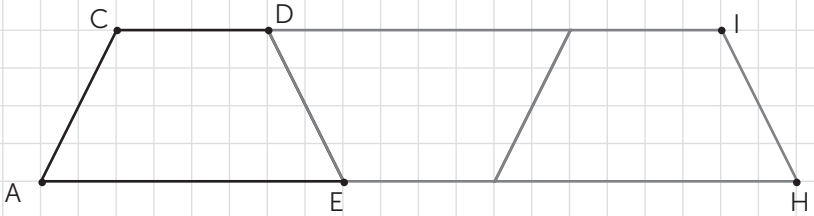


A B C

2 En la figura, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. Los puntos E, F, G y H son los puntos medios de cada lado de ABCD. Determiná a qué fracción del área total corresponde el área sombreada.



3 El trapecio isósceles ACIH está formado por otros tres trapecios isósceles iguales. Encontrá una forma de justificar por qué, si las bases del trapecio ACDE se triplican, queda determinada una figura cuya área es la misma que la del trapecio ACIH.



4 Si se duplican las longitudes de los lados de un rectángulo, ¿es cierto que también se duplica la longitud de su diagonal?

5 El punto (–1; 3) es el centro de una circunferencia que pasa por el punto (5; 2). Encontrá otro punto que pertenezca a dicha circunferencia.

Capítulo 10: Probabilidad

1 a) Se arroja un dado. De los resultados que se señalan a continuación, ¿cuáles te parecen imposibles, cuáles van a ocurrir seguro y cuáles podrían ocurrir?

- Que salga un 5.
- Que salga un múltiplo de 7.
- Que salga un número entero positivo.
- Que salga un número primo.
- Que salga un divisor de 60.
- Que salga un número de dos dígitos.

b) Escribí un ejemplo de un resultado que, al tirar el dado, resulte seguro, uno que resulte posible y otro que sea imposible, todos distintos a los de a).

2 a) Si se arrojan dos dados, ¿cuáles son todas las combinaciones posibles para que la suma dé 7?

b) ¿Hay algún otro resultado que se pueda obtener mediante más combinaciones?

3 En el kiosco de la escuela venden estas bebidas: limonada, agua y gaseosa.

a) Martín y Andrés deben elegir una de las bebidas y deciden que no sea la misma, así la pueden compartir. ¿Cuántas y cuáles son las diferentes maneras en que pueden elegir su bebida Martín y Andrés?

b) ¿Cuántas opciones distintas tendrían Martín y Andrés si decidieran que sí pueden elegir la misma bebida?

4 Se tira tres veces seguidas una moneda y se anota si en cada tirada salió cara o ceca.

a) ¿Es posible que salga cara tres veces seguidas?

b) Anotá todas las combinaciones de resultados que pueden ocurrir.

c) ¿Es cierto que es igual de probable que salga dos veces cara y una vez ceca a que salga una vez ceca y dos veces cara?

5 Hay dos bolsas con bolitas. En la primera hay 4 bolitas rojas y 6 amarillas. En la segunda hay 3 bolitas verdes y 7 azules. Se saca una bolita al azar de cada bolsa.

a) ¿Es más probable que salga una bolita roja de la primera bolsa o que salga una verde de la segunda?

b) Si se agrega una bolita amarilla a la primera bolsa, ¿es cierto que es igualmente probable sacar una bolita amarilla de la primera bolsa que sacar una azul de la segunda?

1 Una bolsa tiene el doble de chupetines de frutilla que de naranja. Se sabe que solamente tiene de esos gustos. Analía sacó un chupetín al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sacado un chupetín de frutilla?

2 Diego fue a comer a una casa de hamburguesas. Para finalizar su pedido, le dijeron que podía agregarle hasta tres sobres de condimentos adicionales, a elegir entre mostaza, kétchup y mayonesa. ¿De cuántas maneras distintas podía completar su pedido?

3 Cinco amigos subieron a un colectivo que tenía 8 asientos vacíos.

a) ¿De cuántas maneras distintas se podían sentar?

b) Explicá por qué el cálculo $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ permite contestar la pregunta anterior.

4 En una bolsa hay bolitas de tres colores: azul, rojo y verde. Se sabe que las probabilidades de extraer una bolita de cada uno de los colores son las siguientes.

$P(\text{Azul}) = \frac{1}{10}$ $\quad P(\text{Rojo}) = \frac{3}{5}$ $\quad P(\text{Verde}) = \frac{3}{10}$

a) Indicá cuántas bolitas de cada color podría haber en la bolsa.

b) ¿Es cierto que, si se duplican las cantidades que indicaste en a), las probabilidades no se modifican?

5 Para jugar al truco se utiliza un mazo de 40 cartas españolas. En cada mano se reparten tres cartas. Un jugador que recibe las tres cartas del mismo palo puede cantar "flor". ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

6 Utilizando los dígitos del 0 al 9 se quieren formar números de 5 cifras.

a) Si no se pudieran repetir las cifras, encontrá dos formas de calcular la probabilidad de que uno de los números sea par.

b) Si se pudieran repetir las cifras, ¿cuál sería la probabilidad de que uno de los números fuera par?

El libro de Mate

1.°
2.°

El libro de Mate 1.°/2.° es una obra colectiva, creada, diseñada y realizada en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana, bajo la dirección de **Graciela M. Valle**, por el siguiente equipo:

Coordinación de la serie: Claudia Broitman
Coordinación pedagógica: Andrea Novembre y Horacio Itzcovich
Lectura crítica: Verónica Grimaldi

Autores: Cecilia de Cortazar, Romina Herrera, Jimena Lorenzo, Mauro Nicodemo, Débora Sanguinetti y Paula Trillini

Editora: Verónica L. Outón

Jefa de edición: María Laura Latorre

Gerencia de arte: Silvina Gretel Espil

Gerencia de contenidos: Patricia S. Granieri

SANTILLANA

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el siguiente equipo:

Diseño de maqueta:	Mariela Santos y Silvina Gretel Espil.
Diseño de tapa:	Mariela Santos y Silvina Gretel Espil.
Diagramación:	Silvia Prado y Verónica Trombetta [Estudio Golum].
Corrección:	Patricia Motto Rouco.
Ilustración:	Juan Noailles, Archivo Santillana, Getty Images: iStock, DigitalVision Vectors.
Documentación fotográfica:	Carolina S. Álvarez Páramo y Cynthia R. Maldonado.
Fotografía:	Archivo Santillana, Freepik, Wikimedia Commons, Servicio Nacional del Patrimonio Cultural / Gobierno de Chile, Secretaría de Cultura / Barranquilla. Getty Images: Raúl Arboleda, Richard Silver, Guillermo Legaria, Kaveh Kazemi, Jason Wells, José Luis Quintana, Luis Acostas, Valery Hache, Martin Bernetti, Daniel Brunner, Artur Synenko, Douglas Sacha, Gustavo Ramírez, AFP.
Preimpresión:	Marcelo Fernández y Maximiliano Rodríguez.
Gerencia de producción:	Paula M. García.
Producción:	Elías E. Fortunato y Andrés Zvaliauskas.

Esta publicación fue elaborada teniendo en cuenta las observaciones del Instituto Nacional contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi) surgidas en encuentros organizados con editores de libros de texto.
Para facilitar la lectura, y sin intención de promover el lenguaje sexista, esta publicación utiliza el género masculino para designar a todos los elementos de una clase.

El libro de mate 1.° / 2.° / Horacio Itzcovich... [et al.] ; coordinación general de Claudia Broitman. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Santillana, 2020.
160 p. ; 28 x 22 cm.

ISBN 978-950-46-6134-4

1. Matemática. 2. Escuelas Secundarias. I. Itzcovich, Horacio. II. Broitman, Claudia, coord.
CDD 510.712

Av. Leandro N. Alem 720 (C1001AAP), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

ISBN: 978-950-46-6134-4
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Impreso en Argentina. *Printed in Argentina.*
Primera edición: noviembre de 2020.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de noviembre de 2020 en FP Compañía Impresora, Beruti 1560, Florida, Buenos Aires, República Argentina.

ÍNDICE

1 NÚMEROS NATURALES Y OPERACIONES

2 NÚMEROS ENTEROS

3 GEOMETRÍA I

4 NÚMEROS RACIONALES I

5 FUNCIONES

6 GEOMETRÍA II

7 NÚMEROS RACIONALES II

8 FUNCIÓN LINEAL

9 ÁREAS - TEOREMA DE PITÁGORAS

10 PROBABILIDAD

USO DE ÍCONOS

Hay íconos que indican que pueden usar la calculadora (incluso la de la computadora o la del celular) para resolver o para comprobar.
El ícono de GeoGebra indica que pueden usar ese programa en la computadora o su aplicación en el celular o en la *tablet*.
En los capítulos de Geometría también encontrarán íconos que indican qué recursos están habilitados para resolver cada problema.

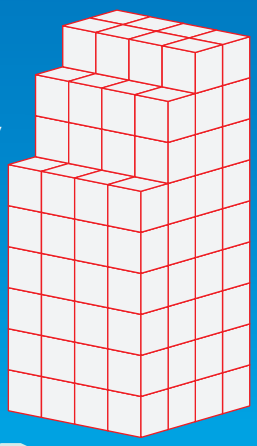
En esta página se proponen actividades que invitan a explorar formas de contar distintas colecciones de elementos según su modo de agrupamiento.

1 NÚMEROS NATURALES Y OPERACIONES

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

Corabastos es el primer centro de acopio y comercialización de la producción agrícola y agroindustrial de Colombia. En este gran mercado hay galpones para mayoristas, zonas minoristas, ferreterías, agroquímicos, red de fríos, zona de empaque y bancos, entre otros sectores.

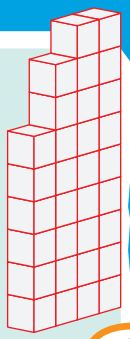
Los bultos de mazorca llegan al mercado en camiones y una vez allí se descargan y se organizan de la siguiente forma: contra una pared primero hacen hileras de cuatro o cinco costales; adelante de esta hilera ubican otra con la misma cantidad de costales que la anterior, y así sucesivamente, hasta tener cuatro o cinco hileras. Una vez formadas todas las hileras, se deposita sobre cada una más costales, hasta que en promedio queden hileras de nueve costales. En el dibujo cada cubito representa un costal.



- Una mazorca es una espiga formada por granos gruesos y juntos. Es el fruto de algunas plantas, como el maíz.
- Un costal es una bolsa de tela resistente que se usa para transportar, por ejemplo, granos y semillas.

PARA PENSAR ENTRE TODOS

- Juan y Luis están conversando acerca de cuántos costales hay en un bulto de mazorca que se representa con este dibujo.
  Juan: "*Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Seis por cuatro, veinticuatro. Dos por tres es seis. Uno por dos es dos. Entonces hay veinticuatro más seis más dos, es decir, treinta y dos*".
  Luis: "*Una pila bajita de seis, atrás hay una pila con dos más, que llegan a ocho, y después hay dos más altas que tienen nueve cada una, o sea, dieciocho. Entonces hay treinta y dos*".
  ¿Cómo estará contando cada uno?



Problemas y cálculos I

Los problemas de estas páginas proponen recuperar algunos de los sentidos de la multiplicación y de la división, relacionando ambas operaciones. Uno de los objetivos de estas actividades es recuperar con los alumnos o establecer, si no tuvieron la oportunidad de analizarlo en años anteriores, que una misma operación permite resolver distintos tipos de problemas.

1 La cooperadora escolar está organizando el festejo por el aniversario de la escuela. Para ello necesita 493 botellas de gaseosas. Las botellas vienen en paquetes de 8.

Para comprobar

Para comprobar

a) ¿Cuántos paquetes se necesitan?

b) ¿Cuántas botellas sobran?

En el problema 1 es posible que los alumnos recurran a diferentes cálculos, buscando considerar el cociente de la división 493 : 8 para responder a la pregunta a). Sin embargo, interpretar que es preciso sumar 1 a ese cociente para alcanzar los 62 paquetes tal vez no sea identificado en una primera instancia. Para la pregunta b) es importante debatir en el aula que 5 no es la respuesta; esa cantidad es la que corresponde a las botellas extraídas del paquete número 62, por lo que sobran 3 botellas.

2 Una hoja cuadriculada tiene 52 filas de cuadraditos, cada fila con 42 cuadraditos. Si se duplica la cantidad de filas y la cantidad de cuadraditos por fila, ¿la cantidad total de cuadraditos será el doble, el triple o el cuádruple de la inicial?

El problema 2 permite analizar la variación que se produce sobre el total de cuadraditos al modificar simultáneamente la cantidad de filas y de columnas. Será interesante analizar que si se duplican filas y columnas, la cantidad total podría averiguarse con el cálculo $52 \times 2 \times 42 \times 2 = 4 \times 52 \times 42$. La interpretación de esta escritura permitirá discutir que se trata del cuádruple.

De a dos

3 Completen la siguiente tabla, teniendo en cuenta que en todos los paquetes hay la misma cantidad de hojas de color.

Para resolver

Para resolver

Cantidad de paquetes de hojas de color	3		8	12	15	20	24	
Cantidad de hojas de color		480		1.152				2.880

4 Las hamburguesas se envasan en cajas de 96. Si se fabrican 800, ¿cuántas pueden ser envasadas para completar la mayor cantidad de cajas?

El problema 4 permite analizar la información que brinda el resto de la división entre 800 y 96, en un sentido algo distinto al del problema 1. Ese resto, 32, representa la cantidad de hamburguesas que quedarían sin envasar. Por lo tanto, la mayor cantidad posible es 800 – 32 = 768 hamburguesas.

5 El papá de Ciro tiene una colección completa de revistas de pesca, desde la número 1. Para guardarlas armó cajas de 15 revistas cada una, ordenadas por número.

a) ¿En qué caja estará la revista número 206?

b) ¿Cuáles son todos los números que están en esa caja?

En el problema 5 será interesante analizar con los alumnos que el cociente de la división entre 206 y 15 permite establecer que la revista 206 está en la caja 14, ya que la cuenta informa que hay 13 cajas completas y que sobran 11 revistas. Ese resto implica la necesidad de una nueva caja, la número 14. A partir del resto de esa división puede determinarse que las revistas de esa caja van desde la 196, ya que $196 = 15 \times 13 + 1$, hasta la 210, debido a que $210 = 15 \times 14$.

De a dos **6** La caña colihue florece en forma masiva cada 45 años aproximadamente. En el verano de 2011 la caña floreció en numerosos sitios de la región norpatagónica de la Argentina. Indiquen el primer año después de 2110 en que volverá a florecer.

Para resolver el problema 6, probablemente los alumnos no apelen en un primer momento al cálculo (2110 – 2011) : 45. Podrían desarrollar otros procedimientos, por ejemplo, sumar 45 desde 2011 hasta pasar 2110 por primera vez; restar 45 desde 2110 hasta lo más cerca posible de 2011; hacer la diferencia con 45 y a ese resultado sumárselo al 2110; buscar por qué número se puede multiplicar a 45 para obtener un número cercano a 99, que es la diferencia entre 2110 y 2011, etc. El docente podrá relacionar esos procedimientos entre sí u otros que circulen.

De a dos **7** Usando que 12 × 6 = 72 resuelvan los siguientes cálculos sin hacer cada cuenta.

Para comprobar

a) 6 × 12 =

b) 24 × 6 =

c) 120 × 60 =

d) 13 × 6 =

e) 11 × 6 =

f) 22 × 6 =

Posiblemente será necesario aclarar a los alumnos el significado de la expresión “usando que”, que propone el problema 7. Se trata de establecer relaciones, a partir de un cálculo dado, para hallar el resultado de otro sin hacer la cuenta que se indica.

De a dos **8** Usando que 432 : 12 = 36, averigüen el cociente de cada división.

Para comprobar

a) 864 : 12

b) 432 : 36

c) 4.320 : 12

d) 4.320 : 120

e) 216 : 12

f) 216 : 6

El problema 8 permite discutir varias relaciones que se ponen en juego en su resolución. Por ejemplo, si 864 es el doble de 432, entonces 864 : 12 va a tener como cociente el doble de 36. Es decir, como 12 × 36 = 432, entonces 12 × 36 × 2 = 864 o 12 × (36 × 2) = 864. Luego, 864 : 12 = 36 × 2. Será interesante analizar que las escrituras permiten interpretar por qué el cociente se duplica al duplicar el dividendo.

El problema de esta sección colectiva final permite volver sobre algunas de las cuestiones trabajadas en los problemas anteriores. Los alumnos podrán analizar que hay 9 números por cada fila, y teniendo en cuenta que el cuadro comienza por el 0, en la primera columna estarán los múltiplos de 9, con resto 0 en la división por 9, y así sucesivamente.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

En un cuadro se ordenaron los números del 0 al 1.000. Esta es una parte del cuadro:

81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107

- ¿En qué columna estará el 900? ¿Y el 998?
- Escriban todos los números que están en la misma fila que 457.

Los problemas de estas páginas proponen analizar la información que ofrecen las descomposiciones multiplicativas permitiendo identificar múltiplos y divisores. Esta descomposición va a ser un punto de apoyo para el trabajo con factores primos.

Divisibilidad y cálculos

1 La multiplicación 12 × 10 puede pensarse como producto entre factores de una sola cifra. Por ejemplo: 12 × 10 = 6 × 2 × 5 × 2.
Escribí, para cada multiplicación, otra que dé el mismo resultado, utilizando números de una cifra.

Para comprobar

Para comprobar

a) 18 × 15 =

b) 24 × 14 =

c) 30 × 21 =

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Si un número natural es el resultado de una multiplicación de dos o más factores que sean números naturales, entonces es **múltiplo** de cada uno de esos factores. Por ejemplo, como 36 = 4 × 9, entonces 36 es múltiplo de 4 y de 9. También puede decirse que si al dividir un número natural por otro el resto es 0, el primer número es múltiplo del segundo. Por ejemplo, 36 es múltiplo de 4 porque el resto de 36 : 4 es 0.
Un número natural es **divisible** por otro si al dividir el primero por el segundo se obtiene un número natural como cociente y el resto es cero. Por ejemplo: 36 es divisible por 4 porque 36 dividido 4 tiene cociente 9 y resto 0.
A su vez, si un número es múltiplo de otro, el segundo es **divisor** del primero. Por ejemplo, como 36 es múltiplo de 4, entonces 4 es divisor de 36.

2 Sin hacer la cuenta de dividir, decidí si los siguientes números son divisibles por 12.

Para comprobar

Para comprobar

a) 72

b) 288

c) 744

El problema 2 apunta a analizar la descomposición en factores de los números dados y, a partir de ello, determinar la divisibilidad por el número 12. Por ejemplo, 72 = 36 × 2 y 36 = 12 × 3; por lo tanto, 12 es divisor de 72. En el caso del 288, una posibilidad es que los alumnos identifiquen que 288 = 72 × 4 = 12 × 6 × 4; por lo tanto, 288 también es divisible por 12. Los alumnos también podrían proponer descomposiciones aditivas, por ejemplo, 288 = 240 + 24 + 12 + 12, lo que permite afirmar que es múltiplo de 12 por ser suma de múltiplos de 12.

3 En cada caso, decidí sin hacer todos los cálculos si cada afirmación es verdadera.

Para comprobar

Para comprobar

a) 12 × 15 da el mismo resultado que 3 × 2 × 5 × 3.

b) 18 × 15 da el mismo resultado que 4 × 2 × 9 × 5.

c) 24 × 15 da el mismo resultado que 12 × 6 × 5 × 2.

d) 6 × 3 × 4 × 5 da el mismo resultado que 18 × 20.

e) 18 × 24 da el mismo resultado que 27 × 16.

En el problema 3 se espera que los alumnos apelen a distintas estrategias para decidir si las multiplicaciones dan el mismo resultado. Por ejemplo, en a) pueden decidir que no es lo mismo porque si bien 5 × 3 = 15, 3 × 2 no da 12. En algunas oportunidades los estudiantes recurren a ciertas estrategias erróneas, como las descomposiciones aditivas escritas como multiplicaciones; por ejemplo: 12 × 15 = 10 × 2 × 12 × 3. Será interesante propiciar un debate que ponga en el centro el análisis de la estrategia a partir de propiedades, relaciones o bien cálculos que ayuden a invalidarla.

De a dos

4 Sabiendo que 25 × 28 = 700, ¿serán divisores de 700 los siguientes números?

25	28	5	7	3

Un asunto que puede derivar de la resolución del problema 4 (y de otros también) refiere a la posibilidad de interpretar la información que porta un cálculo y la conveniencia, en ciertas oportunidades, de escribirlo de otra manera para identificar relaciones que en una primera instancia no se han podido establecer.

De a dos

5 Usando que 16 × 3 × 5 × 2 = 480, y sin hacer las cuentas, hallen los cocientes de las siguientes divisiones.

Para comprobar

Para comprobar

a) 480 : 16

b) 480 : 15

c) 480 : 3

d) 480 : 40

Para resolver el problema 5 resulta interesante que los alumnos identifiquen que no es necesario arribar a un número, sino que pueden dejar expresado el cociente como un producto: 480 : 16 = 3 × 5 × 2. En d) se busca poder transformar la escritura del producto que se dio como dato: 16 × 3 × 5 × 2 = 480, 2 × 8 × 3 × 5 × 2 = 480, 40 × 2 × 3 × 2 = 480; luego, 480 : 40 = 2 × 3 × 2.

De a dos

6 Encuentren todos los divisores de los números que se proponen en cada caso.

a) 30

b) 16

c) 5

d) 24

e) 11

f) 1

En el problema 6 se podrá analizar qué números tienen varios divisores, cuáles tienen como divisores solo al 1 y a sí mismos y cuál tiene un único divisor. Si los problemas 2 y 4 no presentaron mayores dificultades, este problema puede ser propuesto de tarea.

PARA LEER ENTRE TODOS

A los números naturales que tienen exactamente dos divisores (el 1 y ese mismo número) se los llama **números primos**. Si un número natural tiene más de dos divisores, se lo denomina **número compuesto**. El 1 no es primo ni compuesto pues tiene un solo divisor.

7 Descomponé el 40 como una multiplicación entre sus factores primos. ¿Es posible encontrar una descomposición en factores primos distinta de la que hallaste?

En el problema 7 se espera que los alumnos exploren distintas formulaciones y que en una instancia colectiva analicen que se trata de la misma descomposición.

De a dos

8 ¿Será cierto que 2 es el único número primo par? Si creen que no, escriban otros números primos pares. Si creen que sí, expliquen por qué.

En el problema de la sección colectiva final no se espera que los alumnos validen estas afirmaciones, sino que establezcan una conjetura. El docente podría favorecer que se discutiera que uno o varios ejemplos no alcanzan para establecer que una relación se cumple siempre. Sin embargo, será interesante analizar que pueden permitir estudiar la situación y enriquecer la posibilidad de elaborar explicaciones.

ANALIZAR LA VALIDEZ DE AFIRMACIONES ENTRE TODOS

- Un múltiplo de un número primo, ¿es también un número primo? ¿Siempre? ¿A veces? ¿Nunca?
- La suma de dos números primos, ¿es también un número primo? ¿Siempre? ¿A veces? ¿Nunca?

En estas páginas se propone un trabajo de producción de fórmulas que permitan contar la cantidad de elementos del paso n de un proceso que responde a cierta regularidad.

Fórmulas para contar colecciones I

En los primeros problemas no se espera que los alumnos elaboren fórmulas. Se apunta a que logren relatar cómo hacen para saber la cantidad de fósforos de una figura determinada y explicar por qué funciona.

De a dos

1 Utilizando fósforos se armó una secuencia de figuras como las del dibujo.

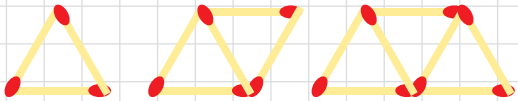


Figura 1 Figura 2 Figura 3

El problema 1 puede abordarse de distintas maneras, lo que favorece la producción de diferentes escrituras apoyadas en cálculos que representan el mismo proceso. Por ejemplo, considerar que siempre se agregan 2, o que se parte de 2 y siempre se agregan 3, etc.

a) ¿Cuántos fósforos habrá en la figura 5?

b) ¿Cuántos fósforos habrá en la figura 20?

De a dos

2 La siguiente sucesión de figuras se formó utilizando fósforos.

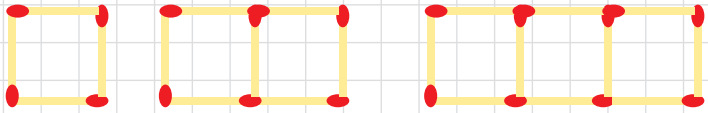


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos fósforos se utilizarán para armar la figura 5? ¿Y para la figura 12?

b) Juan dice que la cantidad de fósforos en una figura siempre es uno más que un múltiplo de 3. ¿Tiene razón?

c) Decidan si la fórmula $3\mathbf{n} + 1$ permite averiguar la cantidad de fósforos necesarios para armar la figura **n** y expliquen por qué.

En el ítem c) del problema 2 se pretende analizar la información que porta un cálculo de manera explícita.

PARA LEER ENTRE TODOS

En lugar de escribir $2 \times \mathbf{n} + 4$ se suele escribir $2\mathbf{n} + 4$. Cuando no hay un símbolo de operación entre un número y una letra, se entiende que se multiplican.

De a dos

3 Esta serie de figuras está constituida por bordes de cuadrados formados por cuadraditos. En cada figura la longitud del lado es un cuadradito más que la longitud del lado de la figura anterior.

Para hacer en la carpeta

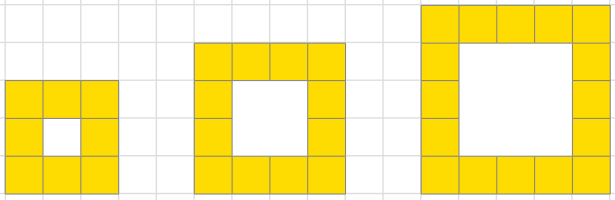


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos cuadraditos habrá en el cuadrado de la figura 6? ¿Y en el de la figura 20?

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten determinar la cantidad de cuadraditos de la figura **n**?

$4(\mathbf{n} + 1)$ $2\mathbf{n} + 4 + 2\mathbf{n}$ $4(\mathbf{n} + 2) - 4$

PARA LEER ENTRE TODOS

Se dice que dos **fórmulas** son **equivalentes** si se obtiene el mismo resultado para cualquier valor que tome **n**. En ese caso, una fórmula puede transformarse en la otra operando o aplicando propiedades de las operaciones.

Si dos fórmulas coinciden solo para algunos valores o no coinciden para algún valor de **n**, entonces no son equivalentes.

Como el valor de **n** varía, a **n** se la llama **variable**.

4 Elaboren una fórmula que les permita saber cuántas monedas habrá en la figura **n** para una colección que se distribuye a partir de organizarlas formando cuadrados.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

El problema 4 habilita a los alumnos a producir información con los datos que ofrece la figura para que surjan expresiones del tipo $1 + n^2 - 1$; $n \times n$; n^2, para determinar cuántas monedas la forman. Este tipo de expresión será retomado en los problemas de la sección siguiente. Si los alumnos no tuvieron mayores dificultades en la resolución de los problemas 1, 2 y 3, el problema 4 podría proponerse de tarea.

De a dos **5** La fórmula 2**n** + 1 sirve para contar la cantidad de elementos de una colección a partir de la posición que ocupa en una serie.

a) Martina dice que si **n** fuera uno de estos tres valores: 3, 5 o 7, se obtendría 11. ¿Tiene razón?

b) Lautaro dice que la cantidad de elementos nunca puede ser un número par. ¿Están de acuerdo?

De a dos **6** Escriban en cada caso una fórmula que cuente la cantidad de elementos de una colección, de modo que:

Para comprobar

a) Siempre sea un número par.

Para comprobar

b) Siempre sea un número que tiene resto 3 al dividirlo por 4.

En el problema de esta sección no se espera que los estudiantes resuelvan algebraicamente las ecuaciones sino que exploren qué valores verifican las igualdades. Es probable que procedan ensayando y ajustando valores; también podrían pensar en "deshacer los cálculos".

BUSCAR NÚMEROS QUE CUMPLAN CIERTAS CONDICIONES ENTRE TODOS

Analicen, en cada caso, para qué valor o valores de la variable son verdaderas las siguientes igualdades.

$3n + 1 = 31$ $2t + 3 = 13$ $4x + 2 = 30$

A su vez, el docente podrá relacionar la búsqueda de la solución con la identificación de ciertos valores en los problemas anteriores.

Para resolver los problemas de estas páginas se espera que los alumnos produzcan fórmulas y ensayen explicaciones para validar la equivalencia entre expresiones, en algunas ocasiones apoyados en el contexto, y en otras, en las propiedades.

Fórmulas para contar colecciones II

1 La siguiente sucesión de figuras se formó usando fósforos.

Para resolver

Para resolver

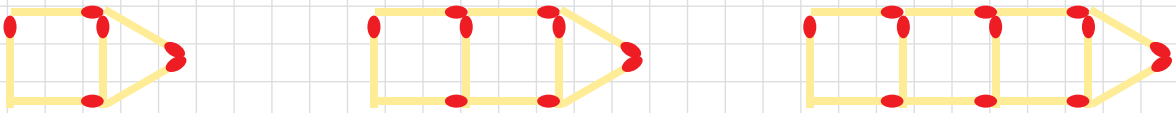


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos fósforos habrá en la figura 50?

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten determinar la cantidad de fósforos de la figura **n**?

$3\mathbf{n} + 3$ $3(\mathbf{n} + 1)$ $6 + (\mathbf{n} - 1)^3$ $4 + 3(\mathbf{n} - 1) + 2$

c) ¿Es posible que alguna figura se forme con 1.000 fósforos?

Para la resolución del ítem c) del problema 1 es necesario leer la información que porta la expresión. No se pretende que los alumnos resuelvan la ecuación de manera algebraica, sino que puedan considerar alguna de las expresiones que permita interpretar que como la cantidad de fósforos es un múltiplo de 3, entonces no será posible que formen una figura con 1.000 fósforos exactamente.

d) De las fórmulas que eligieron en **b)**, expliquen el modo de contar la cantidad de fósforos que representa cada una de ellas.

De a dos

2 Una guarda se forma ubicando cuadrados verdes rodeados por cuadrados grises. Cada figura tiene un cuadrado verde más que la anterior.

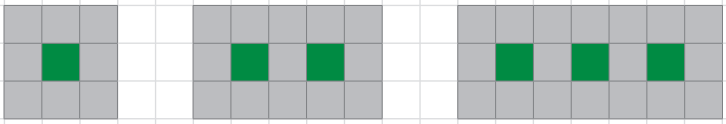


Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten saber cuántos cuadrados grises habrá en la figura **n**?

$5\mathbf{n} + 3$ $3(\mathbf{n} + 1) + 2\mathbf{n}$ $8\mathbf{n}$

$3(2\mathbf{n} + 1) - \mathbf{n}$ $2(2\mathbf{n} + 1) + \mathbf{n} + 1$ $8 + 5(\mathbf{n} - 1)$

PARA LEER ENTRE TODOS

Hay diferentes maneras de decidir si dos **fórmulas** son **equivalentes**. Una de ellas es interpretar que representan distintas maneras de contar lo mismo. Otra forma es utilizando las propiedades de las operaciones para transformar una fórmula en la otra.

Por ejemplo, si se quiere estudiar la equivalencia entre las fórmulas $3\mathbf{n} + 3$ y $3(\mathbf{n} + 1)$, se puede usar la propiedad distributiva y asegurar que como $3(\mathbf{n} + 1) = 3\mathbf{n} + 3$, entonces son equivalentes.

Por otro lado, al realizar todas las sumas posibles en $2\mathbf{n} + \mathbf{n} + 1 + 2$, se obtiene la expresión $3\mathbf{n} + 3$. Estas dos fórmulas también son equivalentes.

El problema 2 apunta a reconocer expresiones equivalentes apoyadas en el uso de las propiedades distributiva y asociativa. Por un lado se espera discutir por qué son equivalentes algunas de las expresiones, y por otro, poner en debate un error frecuente de los alumnos que sostienen que 5n + 3 es equivalente a 8n.

De a dos 3

Para resolver

Para resolver

La siguiente sucesión de figuras se construyó con fósforos. Todas tienen 4 fósforos de alto y siempre se agrega una columna.

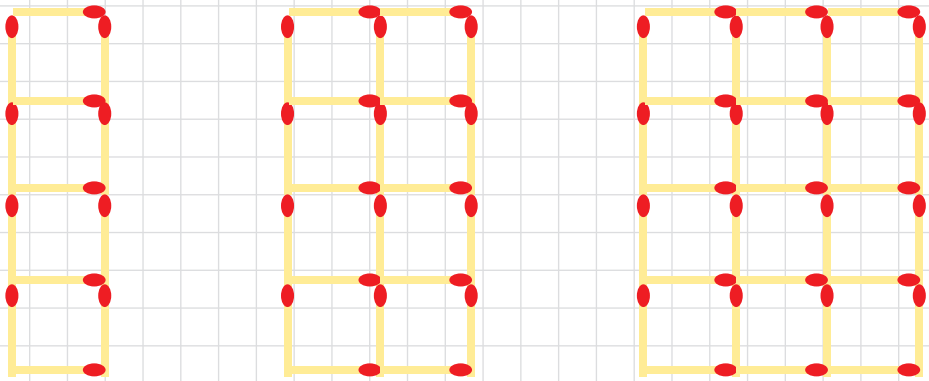


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Calculen la cantidad de fósforos necesarios para construir la figura en el lugar 100 de la secuencia.

b) Encuentren una fórmula que permita saber qué cantidad de fósforos hay en la figura que está en el lugar **n**.

c) Encuentren una fórmula equivalente a la que hallaron en la pregunta b).

d) ¿Es cierto que la cantidad de fósforos es siempre un número impar?

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

- Ramiro dice que las fórmulas 2**n** + 3**n** y 3**n** + 2 son equivalentes porque para **n** = 1 las dos valen 5. ¿Están de acuerdo?
- Encuentren dos fórmulas equivalentes a 5**n** + 1 y expliquen cómo pueden estar seguros de que lo son.

En estas páginas se proponen problemas que abordan de manera explícita las nociones de potencia y raíz.

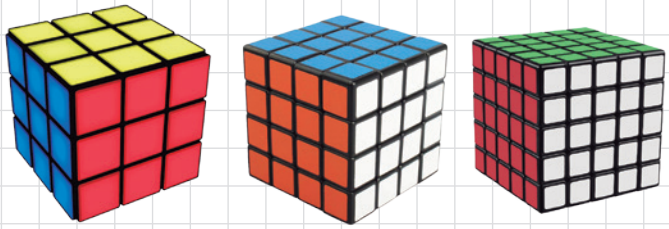
Problemas y cálculos II

De a dos

1 Para cada uno de estos cubos mágicos, calculen cuántos cubos pequeños lo forman.

Para resolver

Para resolver



Los tres primeros problemas buscan recuperar estrategias multiplicativas y utilizar la potencia como una forma más económica de expresar ciertos productos. El docente podrá invitar a los alumnos a interpretar el papel que juegan la base y el exponente en el contexto de cada situación. Resulta interesante recurrir a la calculadora para calcular potencias y raíces, explorando diferentes tipos, incluso las del celular, como modo de abonar a su estudio.

De a dos

2 La clave numérica para el cajero automático está formada por cuatro números que pueden repetirse.

a) Si se tiene que elegir entre los números 1, 2, 3, 5 y 8, ¿cuántas claves diferentes se podrán formar?

b) Si se puede elegir cualquier número, ¿cuántas claves diferentes se podrán formar?

De a dos

3 Agustín y Valentina tuvieron tres hijos. Cada uno de estos hijos tuvo a su vez tres hijos, y durante varias generaciones todos sus descendientes tuvieron tres hijos. ¿Cuántos niños nacieron en la cuarta generación? ¿Y en la sexta?

Para hacer en la carpeta

De a dos

4 En una mesa se quiere cubrir un sector cuadrado con venecitas, sin que quede espacio entre ellas. Las venecitas son cuadradas.

Para resolver

a) Si se emplearon 289 venecitas, ¿cuántas se usaron por lado?

Para resolver

b) Si se tienen 650 venecitas, ¿cuántas se pueden usar para cubrir el cuadrado más grande posible?

En el problema 4 los alumnos podrían resolver de manera exploratoria, a partir de multiplicar un número por sí mismo, recuperando la idea de cuadrado de un número. Algunos alumnos tal vez puedan recuperar la noción de raíz cuadrada si fue tratada el año anterior.

De a dos

5 Felipe completó una tabla con potencias de 2, y se dio cuenta de que a medida que el exponente disminuye 1 unidad, la potencia se divide por 2. Completen la tabla e intenten explicar por qué ocurre lo que dice Felipe.

Para comprobar

Para comprobar

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	16	8	4		

:2 :2 :2

El problema 5 apunta a trabajar de manera intuitiva con las potencias de exponente 1 y 0. Será interesante saber qué ocurre con diferentes bases, de manera de generalizar esas observaciones.

En este libro se considera a los números naturales a partir del 1. Si lo cree necesario, el docente podrá aclararlo para los estudiantes.

6 Un vivero distribuye almácigos cuadrados de dos tamaños, grande y chico.

a) Si se arma el almácigo grande para colocar 11 semillas por fila, y el almácigo chico con 7 por fila, ¿cuál es el cálculo que permite determinar la cantidad total de semillas que se colocaron?

El problema 6 propone discutir la información que puede interpretarse a partir de cada una de las notaciones que se ofrecen.

$11^2 - 7^2$ | $11^2 + 7^2$ | $(11 - 7)^2$ | $(11 + 7)^2$

b) Lautaro necesita un almácigo grande para colocar 324 semillas y un almácigo chico para colocar 81 semillas. Quiere calcular cuántas filas más tendrá el almácigo grande que el chico y no está seguro de cuál de los siguientes cálculos usar:

$\sqrt{324 - 81}$ | $\sqrt{324} - \sqrt{81}$

Indicá cuál de los dos cálculos es correcto y por qué.

En la parte b) del problema 6 probablemente sea necesario que el docente promueva la lectura colectiva del segundo cartel "Para leer entre todos".

PARA LEER ENTRE TODOS

Se llama **potencia** al producto de factores iguales. Por ejemplo, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ se lee "dos a la cuarta", y es una potencia de base 2 y exponente 4. El **exponente** indica la cantidad de veces que aparece la **base** como factor. A las potencias de exponente 2 se las llama "cuadrado". Por ejemplo, 5^2 se lee "cinco al cuadrado". A las potencias de exponente 3 se las llama "cubo". Por ejemplo, 4^3 se lee "cuatro al cubo". Cualquier número natural elevado a la potencia 0 da 1.

PARA LEER ENTRE TODOS

La **raíz cuadrada** de un número es un número, mayor o igual que 0, que si se eleva al cuadrado da como resultado el primero. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 49 es 7, porque $7^2 = 49$, y se simboliza $\sqrt{49} = 7$.

7 Completá con números que hagan verdadera la igualdad en cada caso.

Para comprobar Para comprobar

a) $\_\_\_^2 = 169$ b) $\_\_\_^4 = 625$ c) $4\_\_ = 1.024$ d) $\sqrt{\_\_} = 13$

En los problemas 7 y 8 se busca que los alumnos utilicen algunos resultados memorizados, los conceptos de potencia y raíz, que estimen el orden de magnitud de los resultados y que puedan vincular estas operaciones, reconociendo que una es la inversa de la otra. Es probable que sea necesario que el docente colabore en la identificación de los símbolos de raíz cuadrada que usan diferentes calculadoras.

8 Completá la siguiente tabla.

Para comprobar Para comprobar

Si el número es	256			1	100
Su raíz cuadrada es		6	9		

ANALIZAR LA VALIDEZ DE IGUALDADES ENTRE TODOS

Decidan si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

$5^3 = 5 + 5 + 5$ | $10^4 = 10 \times 4$ | $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ | $3^6 = 6^3$ | $\sqrt{64} = 32$ | $\sqrt{400} = 20$

RECAPITULAR ENTRE TODOS

El propósito de esta página es ofrecer un conjunto de actividades que permitan a los alumnos revisar los problemas resueltos y las ideas utilizadas a la luz de cierto trayecto recorrido. Se trata de que tengan una nueva oportunidad de visitar sus resoluciones, analizar los procedimientos empleados, y distinguir y sistematizar las cuestiones que deben retener como fruto del trabajo en clase. Seguramente el docente deba gestionar momentos iniciales de trabajo individual o en parejas para luego dirigir un espacio colectivo de debate y síntesis que permita ordenar las situaciones que aquí se plantean. Es probable que el desarrollo de estas actividades propicie la construcción de nuevas relaciones y nuevos conocimientos.

1 Vuelvan a mirar los problemas que resolvieron en este capítulo, completen los que hayan quedado sin resolver y revisen los errores. Anoten las dudas que les surjan para aclararlas entre todos.

2 Sabiendo que $50 \times 5 = 250$, decidan cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) 25 es divisor de 250.
b) 10 es divisor de 250.
c) 50 y 5 son divisores de 250.
d) 50 es múltiplo de 250.
e) 250 es múltiplo de 5.

3 Determinen cómo se modifica el producto en una multiplicación:

a) Al duplicar uno de los factores.
b) Al duplicar los dos factores.
c) Al reducir a la mitad uno de los factores.
d) Al duplicar uno de los factores y reducir a la mitad el otro.

4 Indiquen, en cada caso, si las dos expresiones son equivalentes o no. Expliquen cómo lo pensaron.

a) $12\mathbf{n} + 2\mathbf{n}$	$14\mathbf{n}$
b) $3 \cdot (\mathbf{t} + 5)$	$\mathbf{t} + \mathbf{t} + \mathbf{t} + 5$
c) $(\mathbf{p} + 3) \cdot 11$	$11\mathbf{p} + 33$
d) $12\mathbf{m} - 4$	$8\mathbf{m}$

5 Decidan para qué valores de **n** son verdaderas las siguientes igualdades.

a) $3\mathbf{n} + 3 = 1.200$
b) $5\mathbf{n} + 3 = 18$

6 Seleccionen el problema de las páginas 12 y 13 que les haya parecido más difícil. Escriban por qué les parece difícil y también un consejo para resolver otro problema parecido.

7 Luego de volver a mirar las páginas 14 y 15, inventen un problema que requiera algún cálculo con raíces o potencias.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Para el primer día de clases, la cooperadora de la escuela quiere obsequiar a sus alumnos un alfajor artesanal. Para ello necesita 423 alfajores y compra cajas de 12.

a) ¿Cuántas cajas necesitan comprar?
b) ¿Cuántos alfajores sobran?

2 Un cometa pasa cerca de la Tierra cada 32 años. El último registro muestra que pasó en 1992. Indicá el primer año después de 2096 en que volverá a pasar.

3 Las figuritas "TC 2000" vienen en paquetes de 6. Hoy se imprimieron 3.190 figuritas. ¿Cuántas más hay que imprimir como mínimo para hacer una cantidad entera de paquetes?

4 Usando que 15 × 72 = 1.080, y sin resolver las multiplicaciones, calculá el producto en cada caso.

a) 15 × 36 =
b) 15 × 720 =
c) 150 × 720 =
d) 45 × 12 =
e) 16 × 72 =
f) 15 × 71 =

5 Usando que 832 : 26 = 32, hallá el cociente de cada una de las siguientes divisiones.

a) 832 : 32
b) 1.664 : 26
c) 8.320 : 26
d) 8.320 : 260
e) 416 : 26
f) 416 : 13

6 En un edificio hay 7 departamentos por piso, incluyendo la planta baja.

a) ¿En qué piso está el departamento 78?
b) ¿Cuáles son los números de todos los departamentos que están en ese piso?

7 Completá la siguiente tabla, teniendo en cuenta que en todos los paquetes hay la misma cantidad de hojas de color.

Cantidad de paquetes de hojas de color	3		8	12	15	20	24	
Cantidad de hojas de color		376		1.128				2.820

8 Sin hacer la cuenta de dividir, decidí si los siguientes números son divisibles por 36.

a) 468
b) 542
c) 682
d) 1.116
e) 1.510

9 Con cuadraditos, se armó una colección de figuras comenzando con tres cuadraditos, uno al lado del otro, y agregando en cada nueva figura un cuadradito.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántos cuadraditos hay en la figura 7? ¿Y en la figura 15? Explicá cómo hiciste para saberlo.

b) Decidí si la fórmula **n** + 2, en la que **n** representa la ubicación en la serie, permite averiguar la cantidad de cuadraditos necesarios para armarla y explicá por qué.

10 La siguiente sucesión se forma con cuadraditos naranjas a partir de la figura 1 y agregando nuevos cuadraditos naranjas en las figuras siguientes.

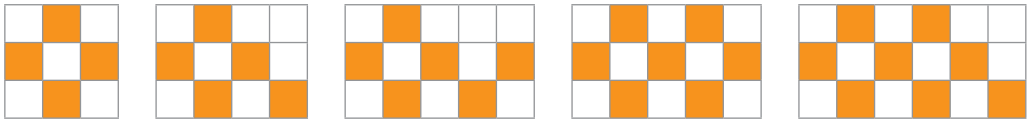


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Elaborá una fórmula que te permita saber cuántos cuadraditos naranjas va a haber en cualquier figura de la secuencia.

b) Utilizá la fórmula que encontraste para saber cuántos cuadraditos naranjas habrá en la figura 35.

c) ¿En qué figura habrá 63 cuadraditos naranjas?

11 Julia encontró la fórmula 10**n** + 5 para contar la cantidad de elementos de una colección a partir de la posición que ocupa en una serie. Dice que vale 25 para alguna de las siguientes posiciones: **n** = 1, **n** = 2 o **n** = 3. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Esta serie de figuras está formada por cuadraditos grises que se ubican uno al lado del otro, incrementándose de 1 en 1. Estos cuadraditos grises están rodeados de cuadrados rojos, como se ve en el dibujo.

Figura 1

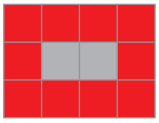


Figura 2

Figura 3

a) ¿Cuántos cuadraditos rojos tendrá la figura 5? ¿Y la figura 30?

b) Para saber cuántos cuadraditos rojos va a tener la figura **n** se puede utilizar la fórmula 6 + 2**n**, donde **n** representa el número de figura de la serie.
Escribí otra fórmula para conocer cuántos cuadraditos rojos va a haber en cualquier posición a partir de contar los cuadraditos de otra manera.

2 Utilizando venecitas se armó una secuencia de figuras como la de la imagen. En cada una se va agregando una parte de la guarda blanca rodeada de venecitas azules.

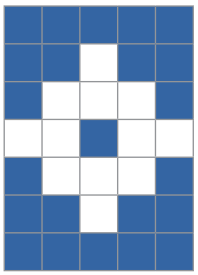


Figura 1

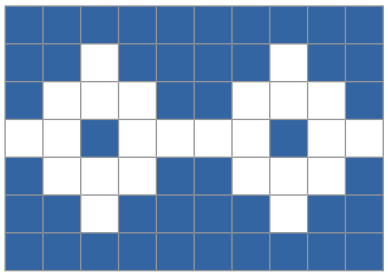


Figura 2

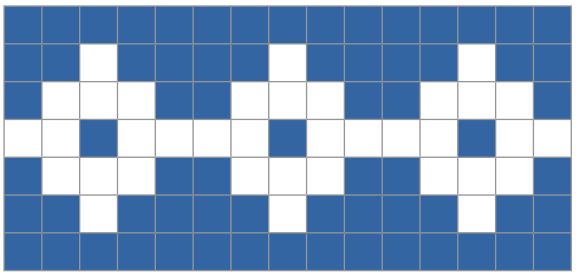


Figura 3

a) ¿Cuántas venecitas azules habrá en la figura 5? ¿Y en la figura 20?

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten saber cuántas venecitas azules se necesitan para completar la figura **n**?

13**n** + 10**n**

12**n**

12**n** + **n** + 10**n**

23**n**

13**n** + 10

3 La secuencia de figuras está formada por una cruz central gris rodeada de cruces celestes. En cada figura se agrega una cruz gris y las celestes que la rodean.

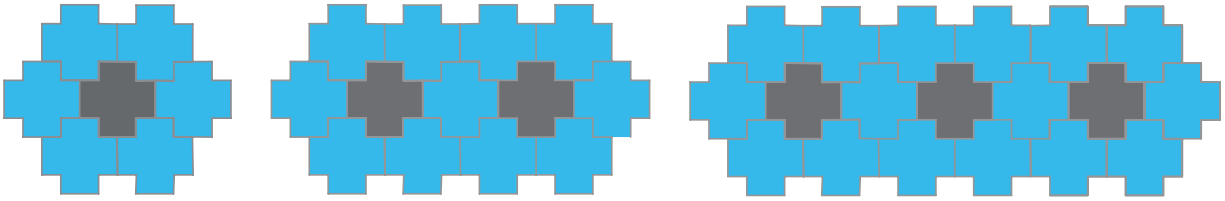


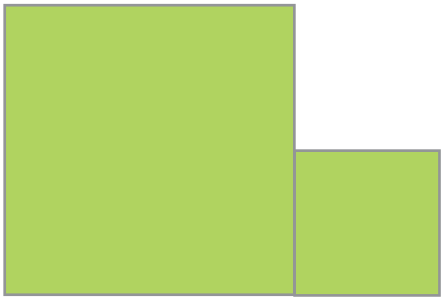
Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Escribí una fórmula que permita calcular la cantidad de cruces celestes que se necesitan en la figura **n**.

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas son equivalentes a la que encontraste?

$3\mathbf{n} + 2\mathbf{n} + 1$ | $6\mathbf{n}$ | $5(\mathbf{n} + 1)$ | $4\mathbf{n} + 1 + \mathbf{n}$

4 Se van a construir 2 patios cuadrados, uno al lado del otro, como se muestra en la siguiente figura.



a) Si en el patio grande se van a armar 12 filas de 12 baldosas cada una, y en el patio chico, 7 filas de 7 baldosas cada una, ¿cuál es el cálculo que permite determinar la cantidad total de baldosas que se deben comprar?

$12^2 - 7^2$ | $12^2 + 7^2$ | $(12 - 7)^2$ | $(12 + 7)^2$

b) Si el patio grande va a ser cubierto por 196 baldosas y el patio chico, por 36 baldosas, ¿cuál es el cálculo que permite determinar cuántas filas más de baldosas tendrá el patio grande que el patio chico?

$\sqrt{196 - 36}$ | $\sqrt{196} - \sqrt{36}$ | $\sqrt{196} + \sqrt{36}$ | $\sqrt{196 + 36}$

5 Completá con números que hagan verdadera la igualdad en cada caso.

a) _____^{2} = 529 b) _____^{4} = 2.401 c) 4____ = 16.384

En esta página se proponen actividades que invitan a explorar formas de medir el tiempo en diferentes culturas, y permiten comenzar a pensar en números menores que 0.

2 NÚMEROS ENTEROS

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

El **calendario gregoriano** es utilizado administrativamente en casi todo el mundo, incluso en países y culturas con calendario propio, como forma de unificar la medición del tiempo y las fechas.

El **calendario chino** celebra el año nuevo entre el 21 de enero y el 21 de febrero, cuando ocurre la primera luna nueva. El año 1 de este calendario coincide con el inicio del reinado de Huangdi, un personaje mitológico.

Celebración del año nuevo chino.

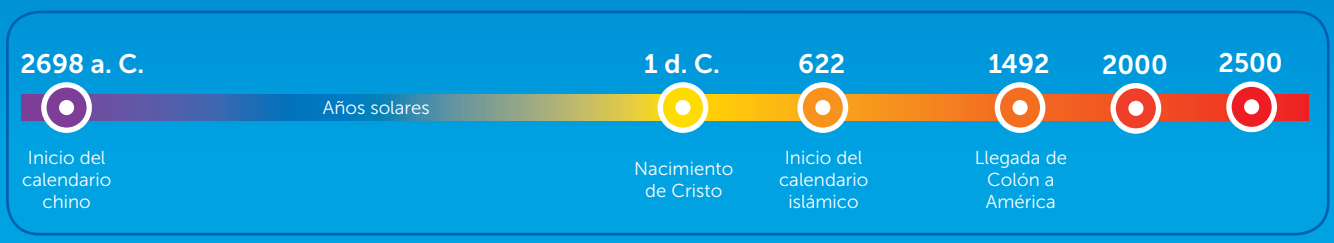
La llegada del año nuevo aimara fue declarada en Bolivia como fiesta nacional en el año 2010. El calendario aimara resulta de sumar 5.000 años de historia social de los pueblos originarios hasta que Cristóbal Colón arribó al continente en 1492.

Celebración del año nuevo andino-amazónico.

Calendario del islam.

El **calendario del islam** tiene 364 días y se basa en el movimiento lunar. Cada mes comienza el día después de una noche de luna nueva. El año 1 es considerado el año en que Mahoma, profeta del islam, tuvo que huir de la ciudad de La Meca hacia Medina debido a la persecución de sus adversarios.

En la siguiente línea de tiempo se indica el inicio de algunos calendarios tomando como referencia el calendario gregoriano.



PARA PENSAR ENTRE TODOS

- Marquen de manera aproximada, en la línea de tiempo, dónde estaría ubicado el año en que nacieron.
- ¿En qué año nacieron según el calendario chino? ¿Y según el islámico?
- De acuerdo con el calendario aimara, ¿en qué año llegó Colón a América?

En los tres primeros problemas de estas páginas se espera que los alumnos desplieguen procedimientos diversos: dibujos, diagramas, flechas y otros. No se aspira a que apelen inicialmente a algún procedimiento experto de cálculo.

Los números enteros en distintos contextos

1 a) Completá la tabla, considerando que cada una de las personas subió 4 pisos en ascensor.

Piso en el que sube	2do subsuelo	1er subsuelo	Planta baja	Piso 1	Piso 2
Piso al que llega					

b) Completá la tabla, si cada persona baja 3 pisos en ascensor.

Piso en el que está	2do subsuelo	1er subsuelo	Planta baja	Piso 1	Piso 2
Piso al que llega					

2 Delfina tomó el ascensor en el octavo piso y fue al primer subsuelo. ¿Cuántos pisos bajó en total?

De a dos **3** En San Martín de los Andes se registró una temperatura de 4 grados bajo cero a la madrugada y de 5 grados al mediodía. ¿Cuántos grados subió la temperatura?

Los problemas 3, 4 y 5 permiten plantear y dejar establecidas algunas convenciones sobre las escrituras; por ejemplo, la escritura del signo "–" delante de un número para indicar que es menor que cero.

De a dos **4** Un submarino se encuentra a 70 metros de profundidad respecto del nivel del mar y desciende 25 metros más. ¿A qué profundidad está ahora respecto del nivel del mar?

De a dos **5** Tito Livio nació en el año 59 antes de Cristo.

a) Si nació en la actual Padua y se trasladó a Roma a los 24 años, ¿en qué año se cambió de ciudad?

Si bien no está determinado el año 0, al abordar el problema 5, el docente podrá establecer como acuerdo dentro del aula la existencia de dicho año para facilitar los cálculos.

b) Si murió en el año 17 después de Cristo, ¿cuántos años vivió?

PARA LEER ENTRE TODOS

Los números menores que 0, denominados **negativos**, se escriben con un signo menos delante; por ejemplo, −37.

De a dos **6** Manuel tenía en su tarjeta Sube un saldo de −72 pesos y luego cargó 100 pesos.

a) ¿Cuál fue el saldo después de realizar la carga?

b) Si toma el colectivo y el viaje cuesta $30, ¿cuál será el nuevo saldo?

c) Si la tarjeta Sube habilita un máximo saldo negativo de $72, ¿cuántos viajes más de $30 podrá hacer Manuel antes de volver a cargar la tarjeta?

De a dos **7** Para crear un nuevo calendario, se decidió ubicar el año 1 en el 2012.

a) ¿Cómo se escribiría el año actual con ese nuevo calendario?

b) ¿Cómo se escribiría el año en que nacieron?

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Aspasia de Mileto nació en el año −475 y murió en el −401. Empédocles nació en el −483 y murió en el año −423.

- ¿Cómo harían para saber si vivieron la misma cantidad de años?
- Discutan algunas maneras de determinar si ambos estuvieron vivos al mismo tiempo.

La recta numérica

Los problemas de estas páginas proponen trabajar con la recta numérica como una herramienta útil para comenzar a identificar algunas relaciones entre números enteros, en particular las asociadas con la distancia entre dos de ellos, relación que permite avanzar en el estudio de este campo de números y sobre algunas de las operaciones que se pueden efectuar.

De a dos

1 Ubiquen en la siguiente recta numérica: 0, –1, –3 y 6.

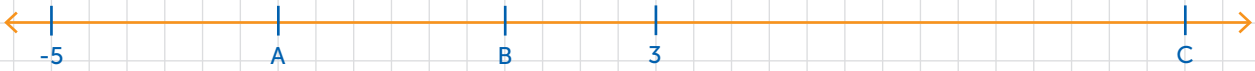
El problema 1 apunta a que los alumnos interpreten la escala utilizada estableciendo relaciones entre los números marcados y a que, en función de ellos, representen los números pedidos.

PARA LEER ENTRE TODOS

En una recta numérica los números negativos se ubican a la izquierda del 0.

De a dos

2 Indiquen qué número corresponde a cada uno de los puntos señalados con una letra en la siguiente recta numérica.

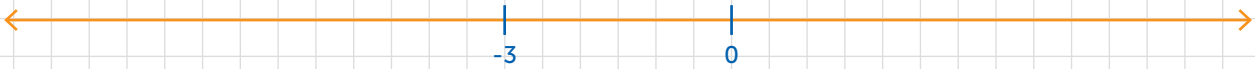


De a dos

3 Encuentren en cada caso todos los números que cumplen con la condición indicada y marquen su ubicación en la recta numérica correspondiente.

a) Están a 4 unidades del 0.

b) Están a 2 unidades de –3.



4 a) Encontrá todos los números que están a distancia 11 de 23.

b) Encontrá todos los números que están a distancia 7 de –14.

c) Encontrá todos los números que están a distancia 6 de 12.

d) Encontrá todos los números que están a distancia 7 de –4.

PARA LEER ENTRE TODOS

La **distancia entre dos números** es la cantidad de unidades que hay entre ellos.

5 Marcá en cada caso, en una recta numérica, los números que están:

Para hacer en la carpeta

a) A la misma distancia de 0 que −5.

b) A la misma distancia de 0 que −1.

c) A la misma distancia de 0 que 0.

d) A la misma distancia de 0 que 3.

PARA LEER ENTRE TODOS

Los números que se encuentran a la misma distancia del 0 se llaman **números opuestos**. Por ejemplo, 10 y −10 son números opuestos. El opuesto de un número entero **m** se escribe −**m**.
Los números opuestos a los naturales se llaman **números negativos**. Los números naturales, sus opuestos y el cero forman el conjunto de los **números enteros**. Se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$.

6 a) ¿Cuál es el opuesto de 8? ¿Y de −8?

Para hacer en la carpeta

b) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de 6?

En el problema 6 los alumnos podrían apoyarse en la recta numérica para ubicar el opuesto de cada uno de los números dados. Los números presentados por el problema son "chicos" para poder ser representados; el docente podría sugerirlo como una estrategia.

De a dos

7 Marquen en cada caso, en una recta, dónde están ubicados todos los números:

a) Cuyos opuestos sean mayores que 0.

b) Cuyos opuestos sean mayores que −2.

c) Cuyos opuestos sean mayores que 3.

d) Cuyos opuestos sean menores que 0.

El problema 7 permite tratar con los números enteros negativos en tanto opuestos de los naturales. Será posible discutir con los alumnos el modo de marcar una colección de números que cumplen una cierta condición en la recta.

PARA LEER ENTRE TODOS

Si **m** es un número entero, se verifica que el opuesto del opuesto de **m** es el mismo número **m**. O sea, − (−**m**) = **m**.

DECIDIR SI ES VERDADERO O FALSO ENTRE TODOS

Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Un número entero es siempre mayor que 0.
- Si un número es positivo, entonces su opuesto es negativo.
- Si en una recta numérica un número está más lejos de 0 que otro, el primero es mayor que el segundo.

Los problemas de estas páginas apuntan a trabajar con la suma y la resta de números enteros. En algunas oportunidades se propone resolver algunos cálculos a partir de la noción de opuesto de un número.

Operaciones con números enteros I

Es muy probable que si los alumnos recurren a la calculadora en algunos de estos problemas, el docente deba informar acerca del modo de anotar números negativos, así como la posibilidad de recurrir al uso de paréntesis.

1 En un juego se agregan o quitan puntos según las cartas que van saliendo en cada mano.

Para comprobar

a) Si se tienen acumulados 7 puntos y hay que quitar 8, ¿qué puntaje se obtendrá?

Para comprobar

b) Si se tienen −2 puntos y hay que agregar 10, ¿qué puntaje se obtiene?

c) Lucía sumó 9 puntos y obtuvo 8 puntos. ¿Qué puntaje acumulado tenía?

d) Daniel restó 5 puntos y obtuvo −3 puntos. ¿Qué puntaje acumulado tenía?

De a dos

2 En un juego, Eleonora fue obteniendo los siguientes puntos:

Para comprobar

−4 −2 6 −10 0 4 −6 −3 −7 10 −2 7 2 −4 7

Para comprobar

Para saber cuál fue su puntaje final, debe sumar todo lo obtenido. ¿Con cuántos puntos terminó?

Para el problema 2, una de las estrategias posibles a la que podrían recurrir los alumnos consiste en sumar los puntajes. También podrían juntar los puntajes "a favor" por un lado, los puntajes "en contra" por otro y finalmente sumarlos. Tal vez algunos alumnos cancelen primero los números opuestos, y luego junten los positivos por un lado y los negativos por otro para dejar planteado un cálculo. No se espera aún que escriban formalmente los cálculos o procedimientos que utilicen.

3 Se dispone de una tira de números enteros ordenados de menor a mayor.

Para hacer en la carpeta

a) Una ficha está ubicada en el número −5. Si se la desplaza 5 casilleros hacia la derecha, ¿en qué número cae?

b) ¿En qué número estaría ubicada la ficha si al desplazarla 6 casilleros hacia la izquierda cayera en 0?

c) ¿Será cierto que la cantidad de casilleros que hay que desplazar la ficha para ir desde −3 hasta 4 es la misma cantidad que la que hay que desplazarla para ir desde −1 hasta 8?

4 Completá con el número que hay que sumar en cada caso para obtener 0.

Para comprobar

a) −3 + _____ = 0

c) −7 + _____ = 0

Para comprobar

b) 6 + _____ = 0

d) 4 + _____ = 0

Los problemas 4 y 5 permiten retomar el trabajo ya realizado en relación con el opuesto de un número entero. Los alumnos podrían apelar a los contextos de juego de los problemas anteriores. El docente podrá sugerir el uso de la recta numérica como apoyo para la resolución.

5 En cada caso, completá con el número que hay que restar para obtener 0.

Para comprobar

a) 9 − _____ = 0

c) −3 − _____ = 0

Para comprobar

b) 5 − _____ = 0

d) −8 − _____ = 0

PARA LEER ENTRE TODOS

Para **escribir un número entero negativo en un cálculo** a continuación de una suma o de una resta se utilizan paréntesis. Por ejemplo, 8 + (−2); 5 − (−4).

Para abordar el problema 6 los alumnos podrían apoyarse en la idea de opuesto. Por ejemplo, para la parte a), podrían identificar que 10 + (–10) + 7 es una terna posible, ya que 10 + (–10) = 0. Si bien no es la única manera, el docente podrá analizar junto a los estudiantes la economía que aporta este recurso.

De a dos

6 La suma de tres números enteros da 7.

Para comprobar

a) ¿Cuáles podrían ser los números, si uno de ellos es negativo?

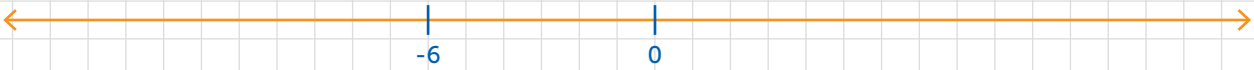
Para comprobar

b) ¿Cuáles podrían ser los números, si dos de ellos son negativos?

De a dos

7 Resuelvan, en cada caso, utilizando la siguiente recta numérica.

Para comprobar



Para comprobar

a) ¿Qué número se le debe sumar a –6 para obtener 0?

b) ¿Qué número se le debe sumar a –6 para obtener 2?

c) ¿Qué número se le debe sumar a –6 para obtener –2?

d) ¿Qué número se le debe sumar a –6 para obtener –10?

e) ¿Qué número se le debe restar a –6 para obtener –10?

8 Resolvé los siguientes cálculos.

Para comprobar

a) 16 – 22 =

b) –13 – 7 =

c) 7 + (–12) =

d) –9 + (–6) =

e) 13 – (–3) =

f) –11 – (–5) =

Para comprobar

9 Completá con el número entero que haga verdadera la igualdad en cada caso.

Para comprobar

a) –8 + _____ = –3

b) –5 – _____ = –15

c) _____ – 10 = –4

d) _____ + 9 = –21

e) – (–4) + _____ = 25

f) –35 + _____ = 0

Para comprobar

ELABORAR ARGUMENTOS ENTRE TODOS

El resultado de una suma entre dos números enteros, ¿puede ser menor que alguno de los sumandos? ¿Y menor que ambos sumandos?

En los problemas de estas páginas se propone trabajar con la división y la multiplicación de números enteros. Los últimos problemas plantean el trabajo con las cuatro operaciones básicas.

Operaciones con números enteros II

1 Un juego tiene dados con números enteros negativos. Se tiran tres dados y se deben sumar sus puntajes.

a) Si en cada uno sale –6, ¿qué puntaje se obtiene?

b) Si salió el mismo número en los tres dados y se obtuvo un puntaje total de –12, ¿qué número salió?

De a dos **2** a) Busquen un número cuya multiplicación por 5 dé –15.

Para resolver

b) Busquen un número cuya multiplicación por –5 dé –15.

Para resolver

c) Busquen un número cuya multiplicación por –5 dé 15.

En el problema 2 el docente podrá invitar a los alumnos a explorar, utilizando la calculadora, antes de formular las reglas correspondientes al signo del producto entre números enteros. Asimismo, se podrá recuperar la idea de multiplicación como suma reiterada. Por ejemplo, $3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$.

En el ítem c) del problema 2, si bien aún no se ha abordado la regla de los signos, el docente podrá plantear algunos interrogantes en torno al producto entre factores negativos y establecerlos a modo de conjetura, asunto que se retomará en los problemas siguientes.

De a dos **3** a) Encuentren, si fuera posible, números enteros **a** y **b** tales que **a** · **b** = 12. ¿Cuántos pares de números cumplen con la condición pedida?

Para comprobar

b) Encuentren, si fuera posible, números enteros **a** y **b** tales que **a** · **b** = –12. ¿Cuántos pares de números cumplen con la condición pedida?

Para comprobar

De a dos **4** a) En esta tabla, a cada uno de los números de la fila **A** se lo multiplica por un mismo número para obtener los de la fila **B**. ¿Cuál es ese número? Completen con los números que faltan.

Para comprobar

Para comprobar

A	–4	–3	–2		0	1
B	12	9		3		–3

Un aspecto que los alumnos tal vez no adviertan con relación al problema 4 es que los números dados en la fila A están en orden ascendente, aspecto que podría colaborar en la búsqueda de los valores, por ejemplo, a partir del conteo. Finalizado el trabajo con las tablas de este problema, el docente podrá proponer a los alumnos que enuncien una conclusión acerca de la multiplicación de dos números negativos, de dos números positivos y de dos números con signos diferentes. También se podría reflexionar sobre la división: por ejemplo, en el ítem a), si todos los números de A se multiplican por (–3) para obtener los correspondientes de B, entonces los números de B divididos por (–3) tienen que dar los correspondientes de A. Por ejemplo, si $(-4) \cdot (-3) = 12$, entonces $12 : (-3) = (-4)$.

b) En esta tabla, a cada uno de los números de la fila **A** se lo multiplica por un mismo número para obtener los de la fila **B**. ¿Cuál es ese número? Completen con los números que faltan.

A		–3	–2		0	1
B	–12		–6	–3		

PARA LEER ENTRE TODOS

Cuando se **multiplican o dividen dos números enteros**, es necesario tener en cuenta los signos de los números involucrados. Si se multiplica o divide un número negativo por otro positivo, el resultado será negativo. Si se multiplican o dividen dos números con el mismo signo, el resultado será positivo. Por ejemplo, $24 : (-3) = -24 : 3 = -8$ porque $(-8) + (-8) + (-8) = -24$, entonces $(-3) \cdot (-8) = 24$.

De a dos

5 En esta tabla, a cada uno de los valores de la fila **A** se lo multiplica por −10 para obtener los correspondientes de la fila **B**. Completen la tabla.

Para comprobar

Para comprobar

A	−20	−10	−5	0	5	10
B						

6 Resolvé las siguientes multiplicaciones y divisiones.

Para comprobar

Para comprobar

a) $(-4) \cdot 3 =$

b) $(-2) \cdot 0 =$

c) $(-5) \cdot (-5) =$

d) $4 \cdot (-6) =$

e) $(-6) \cdot (-4) =$

f) $30 : (-3) =$

g) $(-15) : 3 =$

h) $(-10) : (-2) =$

i) $36 : (-6) =$

7 Resolvé los siguientes cálculos.

Para comprobar

Para comprobar

a) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot 2 =$

b) $-2 \cdot (-4) - 12 : 4 =$

c) $30 : (-5) - (-3) =$

d) $120 \cdot 3 + (-440 - 20) =$

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

La convención sobre la jerarquía de las operaciones establece que primero se resuelven multiplicaciones y divisiones, y luego sumas y restas (excepto que haya paréntesis que indiquen otro orden).

8 Resolvé el siguiente cálculo utilizando solo lápiz y papel y luego comprobá con la calculadora.

Para comprobar

Para comprobar

$-1 - (-3) - 4 \cdot (-2) =$

9 Resolvé los siguientes cálculos.

Para comprobar

Para comprobar

a) $10 - (-4) \cdot 2 - 6 \cdot (-2) =$

b) $4 \cdot (-5 + 2) + (-6 - 5) =$

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

- Busquen todos los valores posibles para el número entero **a** de modo que el producto **a** · **a** · **a** sea negativo.
- Si **a** y **b** son números enteros de distinto signo, el cociente **a** : **b**, ¿siempre va a dar como resultado un número menor que 0?

Divisibilidad

Los problemas que se presentan en estas páginas vuelven sobre aspectos tratados en el capítulo 1 vinculados con la posibilidad de leer información que porta un cálculo o una expresión en el contexto de la divisibilidad, incorporando números negativos. No se pretende que los estudiantes efectúen un despliegue algebraico ni que resuelvan ecuaciones, sino que puedan explorar las condiciones de validez de las afirmaciones que se les proponen.

1 Sin hacer cuentas, ¿es posible saber si el resultado de cada cálculo es múltiplo de 7?

$7 \cdot 19.745$ | $7 \cdot 19.745 + 1$ | $7 \cdot 19.745 + 7$

$7 \cdot 19.745 + 11$ | $7 \cdot 19.745 + 14$ | $7 \cdot 19.745 - 7$

El problema 1 permite analizar la información que brinda la escritura en relación con las nociones de múltiplo y divisor. Se espera que los alumnos identifiquen que, por ejemplo, el producto de 7 por 19.745 va a dar como resultado un múltiplo de 7. También, que si se le suma a ese resultado un número que no sea múltiplo de 7, es posible anticipar que el resultado final no va a ser múltiplo de 7.

PARA LEER ENTRE TODOS

Un número entero **a** es **múltiplo** de otro número **b** distinto de cero si existe un número entero **c** que verifique que **a** = **b** · **c**. Por ejemplo, −20 es múltiplo de 4 pues −20 = 4 · (−5).

De a dos

2 Si se multiplican un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4, ¿será cierto que el resultado siempre es un múltiplo de 6?

Para comprobar

Para comprobar

Los alumnos pueden abordar el problema 2 a partir de descomponer el 4 como 2 · 2. De este modo, asociando uno de los 2 con el 3 se obtiene un 6, por lo que el número necesariamente debe ser múltiplo de 6.

De a dos

3 El producto entre dos números enteros **a** y **b** es 140. Decidan, a partir de esta información, cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

El problema 3 vuelve sobre el trabajo con letras en relación con la divisibilidad, incorporando los números negativos. Los alumnos pueden explorar la situación usando ejemplos y asignando valores a las variables. Sin embargo, se espera que puedan ir avanzando en la búsqueda de razones que expliquen sus respuestas apoyados en las nociones de múltiplos, divisores y sus relaciones, más allá de los casos particulares.

Para comprobar

Para comprobar

5 es divisor de b

−14 es divisor de a

13 no es divisor de a ni de b

a o b deben ser pares

De a dos

4 a) Encuentren, si fuera posible, un valor para el número natural **f**, de manera que el resto de la división entre (24 + **f**) y 8 sea 0. ¿Se podrán encontrar otros? ¿Cuántos?

Para comprobar

Para comprobar

b) Analicen si es posible encontrar un valor entero negativo **f** para el cual el resto de la división entre (24 + **f**) y 8 sea 0.

De a dos

5 ¿Cuáles podrían ser los valores enteros del número **b** para que 25 **b** + 10 sea múltiplo de 5? ¿Cuántos se podrán encontrar?

Para comprobar

Para comprobar

Los problemas 5 a 8 invitan a establecer las condiciones para que una expresión sea múltiplo de un número dado. Se trata de avanzar en la interpretación de la escritura para poder decidir, así como indagar acerca de la cantidad de soluciones posibles.

De a dos

6 a) Encuentren, si fuera posible, todos los valores de **b** para que 2**b** sea impar.

Para comprobar

b) Encuentren, si fuera posible, todos los valores de **b** para que 4(2**b** + 1) sea par.

Para comprobar

7 ¿Cuáles pueden ser los valores enteros del número **b** para que 7(**b** + 1) sea par? ¿Hay más de uno?

De a dos

8 a) Encuentren al menos tres valores enteros de **b** para que 2(**b** + 1) sea múltiplo de 5.

Para resolver

b) Intenten encontrar un argumento que permita entender por qué los valores positivos de **b** terminan en 4 o en 9. Si bien los alumnos, para resolver el problema 8, pueden recurrir a diferentes ensayos, el docente podrá ampliar el debate hacia una posible generalidad que deben cumplir esos números: se trata en todos los casos de valores de b que deberán tener resto 4 al dividirlos por 5, a partir de identificar que la expresión (b + 1) debe ser múltiplo de 5 y, en consecuencia, b deberá ser "uno menos" que un múltiplo de 5.

Para resolver

De a dos

9 a) Decidan si la siguiente igualdad es verdadera para **m** = 2.

Para comprobar

$$11 + (3 \cdot m - 8) = 15$$

Para comprobar

b) Encuentren un número entero **m** que haga verdadera la siguiente igualdad.

$$11 + (3 \cdot m - 8) = 15$$

En el problema 9 se trata de que los alumnos identifiquen qué valor deberá adquirir la expresión entre paréntesis para alcanzar el resultado solicitado y a partir de allí asignarle a m valores posibles.

El problema final colectivo apunta, por un lado, a transformar la escritura de un cálculo en otro equivalente de manera que se favorezca la lectura de cierta información que permita decidir si el resultado es o no múltiplo de 3 sin necesidad de hacer cuentas. La primera parte del problema habilita distintas estrategias a los alumnos: que sumen y reconozcan el número como múltiplo de 3, en el caso de 24; que dividan por 3 el resultado y obtengan resto 0; que prueben la descomposición 26 + 27 + 27 + 1 y, asociando, reescriban la cuenta original 27 + 27 + 27 = 3 · 27 para poder concluir que el cálculo original es múltiplo de 3. Este último procedimiento puede ser propuesto por el docente. La segunda parte abre el camino para una posible generalización.

GENERALIZAR ENTRE TODOS

- Clara escribe algunas sumas de tres números consecutivos y afirma que dan por resultado un múltiplo de 3. ¿Cómo puede estar segura sin resolver el cálculo?

7 + 8 + 9	26 + 27 + 28	90 + 91 + 92	(−3) + (−2) + (−1)

- Si eligen otros tres enteros consecutivos, ¿creen que la suma será un múltiplo de 3? ¿Por qué? ¿Valdrá siempre? ¿Cómo pueden estar seguros?

En los problemas de estas páginas se busca recuperar la noción de potencia con exponente natural, cuyo tratamiento se inició en el capítulo 1, ahora apoyada en la multiplicación entre enteros. Se continúa el trabajo con cálculos que incluyen raíces de índices 2 y 3 con radicando entero, avanzando hacia el análisis de las propiedades de potencias.

Potencias y raíces con números enteros

1 Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $2^5 = 5^2$ c) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ d) $1^5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

2 Para calcular 7^3 se hace $7 \cdot 7 \cdot 7 = 243$. ¿Cómo harías para calcular $(-7)^3$?

Para comprobar

Es muy probable que los alumnos no sepan cómo utilizar la calculadora para comprobar los resultados de algunos de los cálculos. Será una buena oportunidad para que el docente explicite el modo de encontrar potencias y raíces a partir de ella.

Para comprobar

3 Completá la tabla.

En el problema 3 se apunta a que los alumnos puedan analizar si una potencia será positiva o negativa, a partir de considerar la paridad del exponente y el signo de la base. Es muy posible que los alumnos digan que los signos se alternan, siendo una oportunidad para analizar por qué sucede.

Para comprobar

$(-2)^1$	$(-2)^2$	$(-2)^3$	$(-2)^4$	$(-2)^5$	$(-2)^6$	$(-2)^7$
-2	4					

Para comprobar

4 Resolvé los siguientes cálculos.

Para comprobar

a) $(-3)^2 =$ b) $(-10)^4 =$ c) $2^8 =$ d) $(-3)^5 =$

Para comprobar

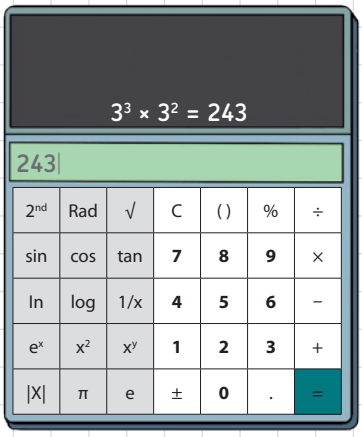
De a dos

5 a) Para resolver el cálculo $3^3 \cdot 3^2$ Juan y Martina usaron la calculadora, pero hicieron cuentas diferentes. Intenten encontrar una manera de explicar por qué los resultados son iguales.

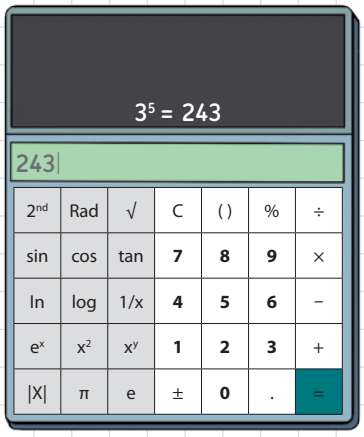
Para comprobar

Para comprobar

Cálculo de Juan



Cálculo de Martina



En los problemas 5 y 6 se pretende que los alumnos traten de manera intuitiva con las propiedades de la potenciación en el conjunto de los enteros.
El docente podrá proponer que piensen las potencias como productos de números iguales como punto de apoyo.
Estas ideas iniciales podrán ser generalizadas a partir de la lectura conjunta del texto "Para leer entre todos" de la página siguiente.

b) En los casos en que sea posible, escriban cada cálculo como una única potencia.

$3^3 \cdot 3^2 =$ $(-3)^3 \cdot (-3)^2 =$ $(3^3)^2 =$ $((-3)^2)^2 =$

6 Sin hacer cuentas ni usar la calculadora, indicá cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado.

$(-3)^3$ $\qquad$ $(-3)^3 \cdot 3$ $\qquad$ $9 \cdot (-3)$

PARA LEER ENTRE TODOS

El **producto de potencias que tienen la misma base** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de cada factor. Por ejemplo:

$$(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^{3+2} = (-4)^5$$

El **cociente de potencias que tienen la misma base** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor. Por ejemplo:

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)\cdot(-4).(-4)}{(-4)\cdot(-4)} = (-4)^{3-2} = (-4)^1 = -4$$

La **potencia de otra potencia** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto entre los exponentes. Por ejemplo:

$$(4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

7 Resolvé los siguientes cálculos. Luego comprobá el resultado calculando las potencias correspondientes.

Para comprobar

Para comprobar

a) $\sqrt{289} =$ $\qquad$ c) $\sqrt{900} =$ $\qquad$ e) $\sqrt[3]{729} =$

b) $\sqrt{441} =$ $\qquad$ d) $\sqrt[3]{343} =$ $\qquad$ f) $\sqrt[3]{-1.000} =$

8 Encontrá, si fuera posible, un número que al elevarlo al cuadrado dé -81.

9 Encontrá en cada caso el número que representa la letra **m** para que la igualdad sea verdadera.

a) $4^m = 64$ $\qquad$ c) $(-4)^m = -64$

b) $(-2)^m = 1.024$ $\qquad$ d) $\sqrt{m} = 36$

PARA LEER ENTRE TODOS

- Si **n** es un número impar, $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$.
Por ejemplo: $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$.
$\sqrt[3]{-125} = -5$ porque $(-5)^3 = -125$.
- Si **n** es un número par y **a** es positivo o cero, $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ y **b** es mayor o igual a cero.
Por ejemplo: $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$.

Para la resolución del problema 9, podría resultar interesante que el docente sugiriera a los alumnos cierto nivel de anticipación con relación a las características del número m en cada caso (si será par o impar, cuando se trata de un exponente; si será positivo o negativo, cuando se trata de la base o radicando).

DECIDIR LA VERDAD O FALSEDAD DE UNA AFIRMACIÓN ENTRE TODOS

Indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Hay dos números que elevados al cuadrado dan 49.
- La raíz cuadrada de -49 es -7.
- El producto de dos potencias con exponente impar es positivo.

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1. Seleccionen el problema de las páginas 22 y 23 que les haya parecido más difícil. Escriban por qué les parece difícil y también un consejo para resolver otro problema parecido.

2. ¿Es verdad que cualquier número entero negativo es menor que cualquier entero positivo?

3. a) ¿Será cierto que la suma de un número entero y su opuesto siempre es cero?

   b) ¿Bajo qué condiciones la suma de dos números enteros da un número negativo?

   c) ¿Bajo qué condiciones la resta de dos números enteros da un número negativo?

4. Inventen un cálculo con multiplicaciones o divisiones y sumas o restas, como los del problema 8 de la página 29, y resuélvanlo. Luego agreguen paréntesis que modifiquen el resultado y vuelvan a resolverlo.

5. Determinen cuál es el signo del producto con la condición que se indica en cada caso.

   a) Si los dos factores son positivos.

   b) Si los dos factores son negativos.

   c) Si un factor es positivo y el otro negativo.

6. Decidan en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa.

   a) Una potencia de base entera siempre es mayor que la base.

   b) Una potencia de base negativa es siempre positiva.

7. Luego de volver a mirar las páginas 32 y 33, inventen un problema en el que sea necesario involucrar algún cálculo con raíces o potencias para resolverlo.

8. Vuelvan a mirar los problemas de este capítulo, completen los que hayan quedado sin resolver y revisen los errores. Anoten las dudas que les surjan para aclararlas entre todos.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR

PARA HACER EN LA CARPETA

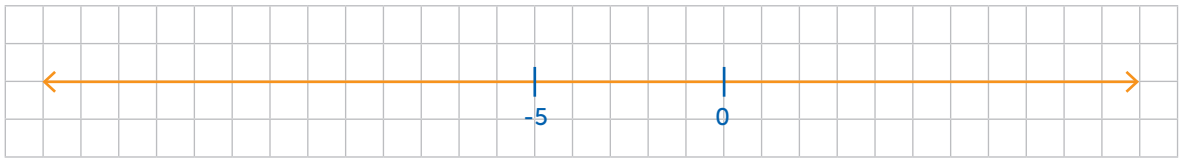
1. Renato tiene $5.000 en su caja de ahorro en el banco. Hoy le van a descontar $6.000 de la cuota de un crédito. ¿Cómo anotarán el saldo en el estado de su caja de ahorro luego del descuento?

2. Ptolomeo de Mauritania nació en el año −13 y vivió 53 años. ¿En qué año murió?

3. Un calamar gigante está a 580 metros de profundidad. Un cachalote se encuentra a −1.100 metros respecto del nivel del mar. ¿Cuántos metros tendrá que nadar el cachalote para comer al calamar, si están en la misma línea vertical?

4. ¿Cuál es la distancia entre −5 y 5? ¿Y entre −7 y 0?

5. Ubicá en la siguiente recta numérica: −10, −2, 4.



6. Encontrá en todos los casos los números que cumplen con la condición indicada y marcá su ubicación en una recta numérica.

   a) A distancia 6 de 0.
   b) A distancia 2 de −3.
   c) A distancia 3 de −7.

7. Completá los cálculos.

   a) −22 + _____ = 0 b) 55 + _____ = 0 c) _____ + (−17) = 0 d) −160 − _____ = 0

8. Resolvé los siguientes cálculos.

   a) −66 + 79 =
   b) −164 − 14 =
   c) 55 − 94 =

9. Buscá un número cuya multiplicación por 7 dé −84.

10. Buscá un número cuya multiplicación por −7 dé 77.

11 Resolvé los siguientes cálculos.

a) $(-6) \cdot 7 =$

b) $(-10) \cdot (-12) =$

c) $81 : (-3) =$

d) $(-55) : (-5) =$

12 Resolvé el siguiente cálculo: $(-4) \cdot (-7) \cdot 2 + 15 : (-5) =$

13 Determiná qué condición debe cumplir el número entero **k** para que el resto de la división entre $(24 + \mathbf{k})$ y 6 sea 0.

14 ¿Cuáles podrían ser los valores enteros de **a** para que $4 \cdot (\mathbf{a} + 4)$ fuera múltiplo de 5? ¿Cuántos se podrán encontrar?

15 El resultado de la suma 74 + 75 + 76 + 77 dividido por 4 da resto 2. Encontrá otras dos sumas de cuatro enteros consecutivos que cumplan con esta condición y otras dos que no la cumplan.

16 Resolvé los siguientes cálculos.

a) $(-5)^4 =$

b) $(-5)^5 =$

c) $((-2)^3)^3 =$

d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 =$

e) $\sqrt[3]{-1.331} =$

f) $\sqrt[3]{216} =$

17 Encontrá en cada caso el número que representa la letra **m** para que la igualdad sea verdadera.

a) $(-2)^{\mathbf{m}} = -512$

b) $(-6)^{\mathbf{m}} = 1.296$

c) $(\mathbf{m})^3 = 125$

d) $\sqrt{\mathbf{m}} = 9$

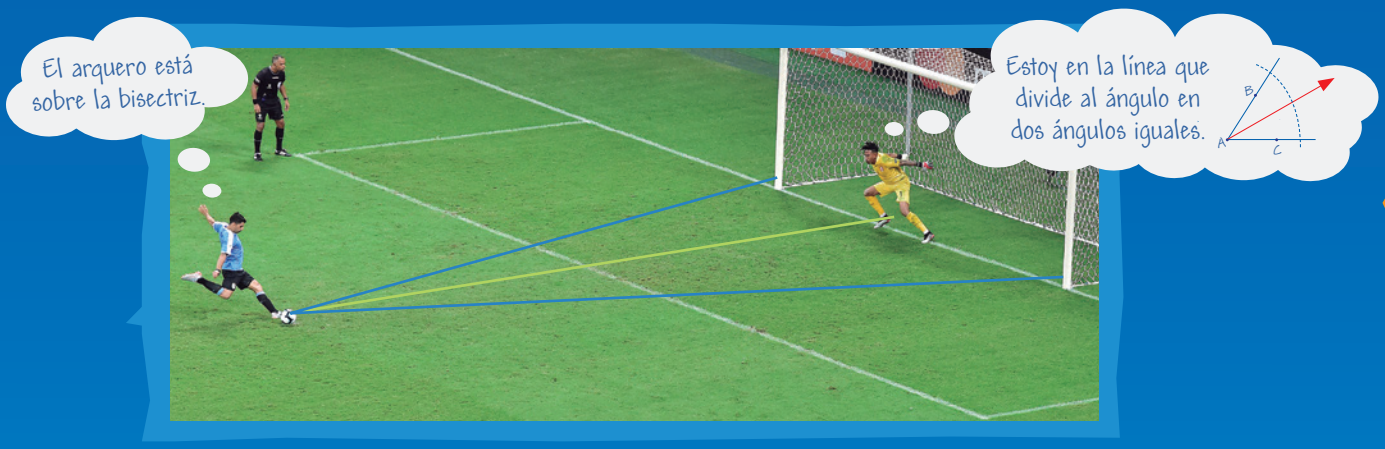
e) $\sqrt[3]{\mathbf{m}} = -2$

f) $\sqrt[3]{\mathbf{m}} = 1$

3 GEOMETRÍA I

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

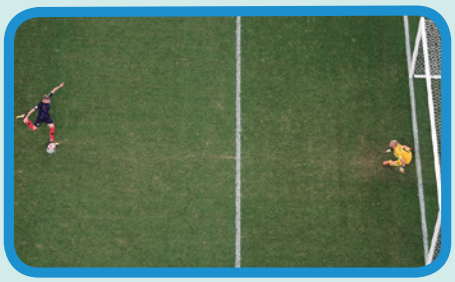
Los entrenadores y especialistas en fútbol recomiendan que el arquero, al momento de defender el arco en una situación de ataque, se ubique aproximadamente sobre la bisectriz del ángulo que se forma entre la pelota y las bases de los dos palos.



En la imagen se indican los lados del ángulo en color celeste y un segmento amarillo contenido en la bisectriz. Se puede ver que el vértice del ángulo está sobre la pelota y los lados pasan por las bases de los palos. El arquero, en esta jugada, está ubicado sobre la bisectriz, tal como lo recomiendan los especialistas.

PARA PENSAR ENTRE TODOS

- ¿Cómo se podrá hacer para saber si un arquero está ubicado aproximadamente sobre la bisectriz o no?



La primera pregunta tiene como intención recuperar la definición de bisectriz de un ángulo y las estrategias de construcción que hayan sido estudiadas en años anteriores. La segunda pregunta introduce un debate que puede derivar en una mirada intuitiva de la propiedad que afirma que la bisectriz de un ángulo está formada por todos los puntos equidistantes a sus lados y su relación con la posibilidad de "disminuir" el ángulo de tiro de quien patea si el arquero se ubica en dicha posición. A partir del trabajo que se propone en el capítulo y, en particular, en el problema 5 de la página 45 será posible validarla.

- ¿Por qué creen que los especialistas sugieren que los arqueros sigan esta recomendación?

Los problemas de estas páginas son una oportunidad para recuperar definiciones estudiadas en años anteriores (radio, diámetro, intersección), así como también la clasificación de triángulos a partir de la longitud de sus lados.

Distancias, circunferencias y triángulos

1 Los puntos A y B están a 3 cm de distancia.

GeoGebra

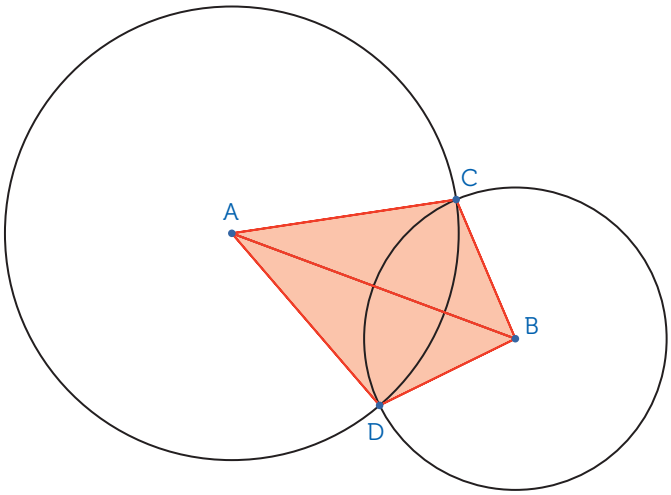
Para resolver

Para usar

Los problemas 1 y 2 permiten poner en juego la noción de circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro dado (centro). Esta idea será de suma importancia para dotar de sentido al uso de circunferencias en la construcción de triángulos.

a) Dibujá todos los puntos que estén a 3 cm del punto A.
b) Dibujá todos los puntos que estén a 4 cm del punto B.
c) ¿Existen puntos que estén a 3 cm de A y a 4 cm de B, a la vez? Si existen, marcalos. Si no existen, explicá cómo te diste cuenta.

2 En la siguiente figura, los puntos A y B se encuentran a 4 cm de distancia. El radio de la circunferencia de centro A es de 3 cm y el radio de la circunferencia de centro B es de 2 cm. Los puntos C y D son las intersecciones entre ambas circunferencias.



Decidí, sin medir, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
a) La longitud del segmento AD es de 3,5 cm.
b) No es posible saber la distancia entre los puntos C y D.
c) Los segmentos BC y BD tienen la misma longitud.
d) El triángulo ABC es isósceles.
e) Es posible estar seguros de que $\overset{\Delta}{ADB}$ es escaleno.

El objetivo del problema 2 es que los estudiantes reconozcan, a partir del análisis de la figura, la información que puede deducirse y la distingan de la que no.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Al considerar la longitud de los lados de un triángulo puede ocurrir que:

- Los tres lados tengan la misma longitud. Estos triángulos se llaman **equiláteros**.
- Al menos dos lados tengan la misma longitud. Estos triángulos se llaman **isósceles**.
- Todos los lados tengan longitudes distintas. Estos triángulos se llaman **escalenos**.

Como los triángulos equiláteros tienen tres lados de igual longitud, también tienen dos de igual longitud y, por lo tanto, son un caso particular de los triángulos isósceles.

Al considerar la amplitud de los ángulos de un triángulo puede ocurrir que:

- Todos sean agudos. Esos triángulos se llaman **acutángulos**.
- Uno sea recto. Esos triángulos se llaman **rectángulos**.
- Uno sea obtuso. Esos triángulos se llaman **obtusángulos**.

De a dos 3

a) Construyan la figura que se indica en el siguiente instructivo.

GeoGebra Para resolver

Para usar

- Dibujen un segmento que mida 5 cm. Llamen P y Q a sus extremos.
- Tracen una circunferencia de 3,5 cm de radio, con centro en P.
- Con centro en Q, tracen una circunferencia de 3 cm de radio.
- Marquen uno de los puntos de intersección entre las circunferencias. Llámenlo S.
- Tracen el triángulo PQS.

b) Sin medir, hallen el perímetro del triángulo PQS.

c) ¿Es cierto que $\overset{\Delta}{PQS}$ es un triángulo rectángulo?

d) ¿Cómo modificarían el instructivo del ítem a) para que $\overset{\Delta}{PQS}$ fuera un triángulo isósceles?

Para el problema 3, ítem c), se espera que los estudiantes apelen a la medición de los ángulos para clasificar el triángulo. En el caso del ítem d), se podrían analizar diferentes maneras de modificar el instructivo en un espacio de discusión colectiva.

ANALIZAR CONSTRUCCIONES ENTRE TODOS

Expliquen cómo se puede construir un triángulo usando circunferencias, si se conocen las longitudes de sus lados. Para la actividad colectiva puede resultar enriquecedor proponer a los estudiantes que escriban en sus carpetas las conclusiones que surjan a propósito del debate, para que puedan ser consultadas frente a la resolución de nuevos problemas.

En los problemas de esta página se proponen actividades de construcción que apuntan a recordar y utilizar propiedades de los triángulos, posiblemente estudiadas en años anteriores.

Construcción de triángulos

De a dos

1

Para hacer en la carpeta

GeoGebra

Para resolver

Para usar

a) Construyan un triángulo EFG con los siguientes datos: El lado $\overline{EF}$ mide 4 cm, el ángulo FEG mide 30° y el ángulo EFG mide 105°.

b) ¿Es posible saber la amplitud del ángulo EGF sin realizar mediciones?

c) ¿Es cierto que el triángulo EFG no podría construirse si el ángulo EFG midiera 160°?

PARA LEER ENTRE TODOS

Cuando se hace referencia a la medida de un segmento o de un ángulo se lo suele escribir entre barras:
$|\overline{EF}| = 4$ cm significa que el segmento EF mide 4 cm.
$|A\hat{B}C| = 60°$ quiere decir que el ángulo ABC mide 60°.

El problema 1 puede servir como punto de partida para indagar acerca del conjunto de valores del ángulo GFE que permiten o no la construcción del triángulo. Este debate podrá retomarse al resolver el problema de la sección colectiva final.

De a dos

2

GeoGebra

Para resolver

Para usar

a) Construyan un triángulo TUV con los siguientes datos: $|\overline{TU}| = 3$ cm, $|\overline{UV}| = 4$ cm y $|\overline{TV}| = 5$ cm.

El ítem b) del problema 2 puede ser una oportunidad para recuperar la propiedad triangular y ponerla en relación con la construcción de triángulos usando circunferencias. En este capítulo no se considerará la desigualdad triangular completa, pero el docente podrá enunciarla si lo cree necesario.

b) ¿Es cierto que $\overset{\Delta}{TUV}$ no podría construirse si $\overline{TV}$, en lugar de medir 5 cm, midiera 8 cm?

La intención de este problema final colectivo es que, a partir de la exploración y la puesta en común de las respuestas, se llegue a concluir que la amplitud de CBA está comprendida entre 0° y 70°. Para validarlo los estudiantes podrán tener en cuenta que como la suma de los tres ángulos es 180°, entonces la suma de dos de ellos debe ser menor que la diferencia entre 180° y uno de los ángulos. La utilización de GeoGebra para analizar los posibles triángulos generados a partir de la variación del ángulo CBA puede resultar un recurso interesante en la resolución de esta actividad.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

En todos los triángulos, la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores siempre es 180°.
En todos los triángulos, la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. Esta relación se verifica para cualquier par de lados que se tome.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Si se quiere construir un triángulo ACB en el cual $|\overline{AB}| = 5$ cm y $|B\hat{A}C| = 110°$, ¿cuánto puede medir el ángulo CBA? ¿Es el único valor posible?

Puntos que cumplen condiciones

Los problemas de esta página permiten trabajar en torno a la noción de mediatriz de un segmento pensada como la recta que lo interseca en forma perpendicular por su punto medio y, también, como lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.

De a dos

1 En la siguiente figura, el punto A es el centro de las circunferencias c_2 y c_4, y B es el centro de las circunferencias c_1 y c_3.

Para usar

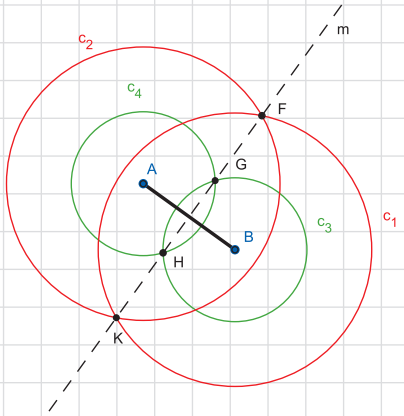
Las circunferencias c_1 y c_2 tienen el mismo radio y sus puntos de intersección son F y K.

Las circunferencias c_3 y c_4 tienen el mismo radio y sus puntos de intersección son G y H.

F, G, H y K son puntos de la recta m.

Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

La intención del problema 1 es que los estudiantes elaboren argumentos iniciales en torno a la idea de mediatriz de un segmento. Los tres primeros ítems pueden validarse o refutarse utilizando relaciones entre los elementos de la figura. No se espera que los estudiantes puedan validar la veracidad de los últimos dos ítems en este momento, sino que alcanza con que hagan exploraciones apoyándose en mediciones. Al momento de realizar la lectura compartida del recuadro "Para leer entre todos" puede resultar enriquecedor poner en relación el texto con la figura del problema 1.



a) El triángulo ABG es isósceles.

b) El triángulo AFB es equilátero.

c) El cuadrilátero AFBK tiene sus cuatro lados de la misma longitud.

d) La recta m forma un ángulo de 90° con el segmento AB.

e) La recta m interseca a $\overline{AB}$ en su punto medio.

PARA LEER ENTRE TODOS

Se llama **mediatriz de un segmento** AB a la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

2 Dibujá un segmento cualquiera y trazá su mediatriz.

Para hacer en la carpeta

Para usar

De a dos

3 a) Construyan la figura que se indica en el siguiente instructivo.

Para hacer en la carpeta

GeoGebra

Para resolver

Para usar

- Dibujen un segmento CD que mida 3 cm.
- Tracen la mediatriz de $\overline{CD}$. Llámenla m.
- Marquen el punto de intersección entre el segmento CD y la recta m. Llámenlo P.
- Marquen un punto sobre m, distinto de P. Llámenlo Q.
- Dibujen el triángulo CQD.

b) Sin medir, decidan si es cierto que $\overset{\triangle}{CQD}$ es un triángulo isósceles.

c) Dibujen el triángulo PQD y, sin realizar mediciones, clasifíquenlo según la amplitud de sus ángulos interiores.

BUSCAR EXPLICACIONES ENTRE TODOS

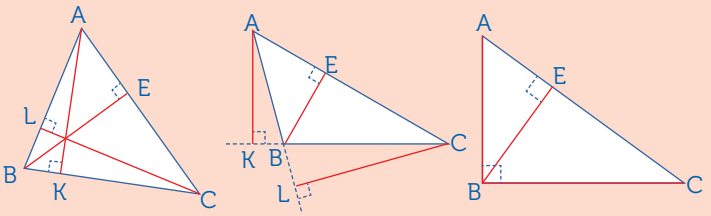
Intenten elaborar una explicación que justifique que la mediatriz de un segmento contiene a todos los puntos que equidistan de sus extremos.

Los problemas de esta página permiten recuperar los conocimientos sobre alturas y ampliarlos a partir de la realización de construcciones. Esto servirá de base para el análisis de las distintas propiedades que se abordarán en el resto del capítulo.

Alturas de triángulos

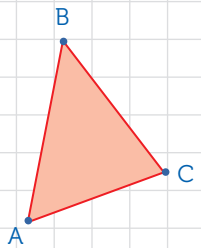
PARA RECORDAR ENTRE TODOS

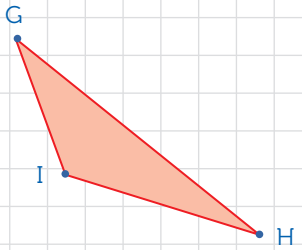
Se llama **altura de un triángulo** a la longitud del segmento perpendicular a un lado con uno de sus extremos en el vértice opuesto a ese lado o a su prolongación. Como los triángulos tienen tres vértices y tres lados, también tienen tres alturas que se representan con segmentos.



1 Trazá las alturas de los siguientes triángulos.

Para usar





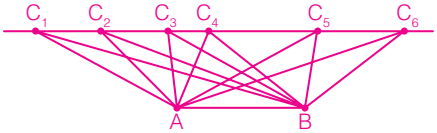
De a dos

2 a) Construyan un triángulo ABC que tenga un lado igual al segmento AB, en el que la altura correspondiente a ese lado mida 3 cm.

Para usar

GeoGebra

El problema 2 tiene infinitas soluciones. Para resolverlo, es posible trazar una recta paralela al segmento AB que se encuentre a una distancia de 3 cm. Cualquiera de los puntos sobre dicha recta podría ser el tercer vértice del triángulo. Si se utiliza el programa GeoGebra, es posible realizar una construcción en la que este punto se desplace sobre la recta paralela. De este modo, puede identificarse la familia de triángulos que es solución del problema. Por ejemplo:



b) ¿Es posible construir un triángulo que cumpla esas condiciones y sea obtusángulo? ¿Y rectángulo?

c) ¿Cuántos triángulos distintos podrían construirse con las condiciones del ítem a)?

IDENTIFICAR PUNTOS ENTRE TODOS

Para la realización de esta actividad puede ser interesante incorporar GeoGebra, construyendo un triángulo con la herramienta "polígono" y marcando las alturas correspondientes a los lados. Esto puede hacerse a través del comando "recta perpendicular": primero haciendo clic en un vértice y luego en el lado opuesto a él. Al arrastrar uno de los vértices se van generando diferentes tipos de triángulos y, de esta forma, se puede explorar la ubicación de la intersección de las alturas utilizando el dinamismo propio del programa.

Investiguen la ubicación del punto de intersección de las alturas o de sus prolongaciones para cada una de las siguientes clases de triángulos.

- Acutángulo.
- Obtusángulo.
- Rectángulo.

Congruencia de triángulos I

El objetivo de esta página es realizar una breve introducción a la idea de congruencia de triángulos, sin apelar aún a los criterios en forma explícita. Esto se hará en las páginas correspondientes a “Congruencia de triángulos II”.

De a dos **1** a) Construyan un triángulo ABC tal que $|C\hat{A}B| = 60°$, $|A\hat{B}C| = 100°$, $|B\hat{C}A| = 20°$.

GeoGebra

Para resolver

Para usar

Una actividad interesante que el docente puede proponer a propósito del problema 1 b) es introducir la pregunta: “¿Es cierto que, siempre que se den las medidas de los ángulos interiores de un triángulo como datos, se podrán construir infinitos?”. Para ello puede resultar útil comenzar dando un nuevo grupo de medidas de ángulos que sumen 180° y observar que, otra vez, se generan infinitos triángulos en función de las medidas de sus lados.

El docente puede utilizar o proponer el uso de GeoGebra para que los estudiantes traten con triángulos cuyos ángulos sean los dados en el enunciado. Se sugiere comenzar por un lado empleando la herramienta “segmento” (que posibilita arrastrar los extremos para cambiar su longitud). Luego se pueden construir ángulos usando la herramienta “ángulo dada su amplitud” y trazando rectas para visualizar los lados. La intersección de dichas rectas será el vértice que determinará el triángulo.

b) ¿Cuántos triángulos ABC distintos se pueden construir con los datos del ítem a)?

De a dos **2** a) ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir que tengan un lado de 4,5 cm y otro de 4 cm?

GeoGebra

Para resolver

Para usar

b) Si se agrega como condición que el ángulo que forman esos dos lados sea de 90°, ¿cuántos triángulos es posible construir?

Se espera que en el ítem a) del problema 2 los estudiantes concluyan que hay infinitos triángulos que cumplen con la condición pedida. Una aclaración que puede hacerse respecto del ítem c) es que la medida de la amplitud del ángulo comprendido entre los dos lados debe ser menor que 180°. La intención de este ítem es realizar una generalización de lo discutido en el ítem b) y pretende sentar las bases para la discusión sobre los criterios de congruencia, que serán abordados en la página siguiente.

c) ¿Es cierto que, si solo se conocen las medidas de dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, el triángulo que se puede construir es único?

La definición de congruencia de triángulos dada en el recuadro “Para leer entre todos” es una definición provisoria, que podrá ser ampliada cuando se estudien los criterios de congruencia detallados en el recuadro de la página siguiente.

PARA LEER ENTRE TODOS

Dos **triángulos** son **congruentes** si al superponerlos coinciden, es decir, no “sobra” ni “falta” nada.

ANALIZAR CONSTRUCCIONES ENTRE TODOS

Un asunto complejo que se pretende debatir, a raíz del problema colectivo, refiere a la relación entre la unicidad de una construcción y la congruencia. Es decir, será parte del trabajo del docente ayudar a que los alumnos puedan interpretar que si es posible construir un único triángulo a partir de ciertos datos, todo otro triángulo que se construya con esos mismos datos será congruente con el primero. Por ejemplo, si se conocen los tres lados y se verifica la propiedad triangular, todos los triángulos que se puedan construir serán congruentes; de allí el criterio LLL.

Analicen en qué casos se podría construir un único triángulo con los datos que se ofrecen.

- Tres lados.
- Un lado y los ángulos que se apoyan sobre él.
- Dos lados.
- Dos ángulos.

En estas páginas se proponen problemas para utilizar los criterios de congruencia. En algunos casos, se trata de decidir sobre la congruencia de triángulos y, en otros, de usar estos criterios para justificar afirmaciones que surgen a propósito de determinadas construcciones.

Congruencia de triángulos II

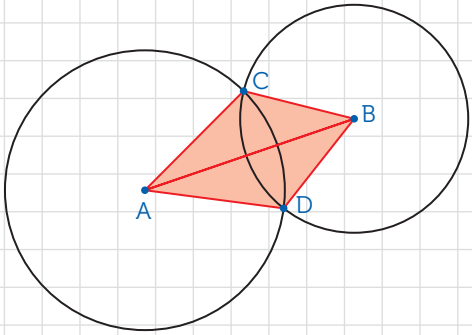
PARA LEER ENTRE TODOS

Los **criterios de congruencia** son condiciones mínimas que permiten garantizar que dos triángulos son congruentes. Algunos de esos criterios son:

- Las longitudes de los tres lados de uno de los triángulos son respectivamente iguales a las longitudes de los tres lados del otro. Este criterio se conoce como Lado - Lado - Lado.
- Las longitudes de dos lados y la amplitud del ángulo que forman esos lados son respectivamente iguales en ambos triángulos. Se conoce como Lado - Ángulo - Lado.
- La amplitud de dos ángulos y la longitud del lado adyacente a ellos son respectivamente iguales en ambos triángulos. Se lo llama Ángulo - Lado - Ángulo.

Entre todos

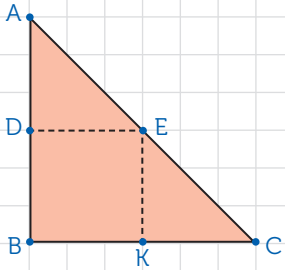
1 En la siguiente figura, los puntos A y B son centros de las circunferencias. Los puntos C y D son sus intersecciones. Busquen una manera de justificar que los triángulos ACB y ABD son congruentes, sin medir.



El docente podrá explicitar, a partir de la lectura colectiva, que las condiciones que determinan la congruencia de triángulos son las mismas que las requeridas en una construcción para que el triángulo sea único. Si bien los criterios de congruencia enunciados incluyen relaciones entre longitudes de lados y amplitudes de ángulos, es posible considerar criterios que involucran otros elementos (alturas, bisectrices, mediatrices, etc.). Algunos de estos serán estudiados en la página 45.

De a dos

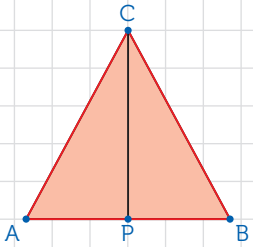
2 En la siguiente figura, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, $|C\hat{B}A| = 90°$, E está sobre el lado $\overline{AC}$, K sobre $\overline{BC}$ y D sobre $\overline{AB}$. Además, el segmento DE está contenido en la mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overline{EK}$ en la mediatriz de $\overline{BC}$. ¿Cómo se puede saber, sin medir, que E es punto medio de $\overline{AC}$?



En el problema 2, los estudiantes podrán apelar a la congruencia de los triángulos AED y ECK para concluir que $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$ tienen la misma longitud y, por lo tanto, que E es el punto medio del lado $\overline{AC}$.

De a dos

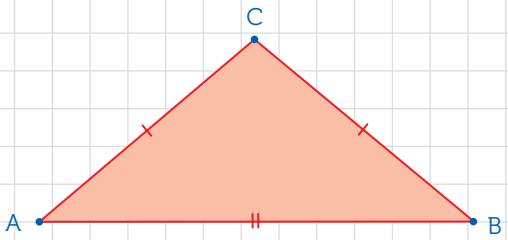
3 En el triángulo ACB los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ tienen la misma longitud. El segmento CP es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$. Sin medir y usando algún criterio de congruencia, expliquen por qué $\overline{CP}$ está incluido en la mediatriz de $\overline{AB}$.



De a dos **4** a) Tracen la bisectriz de cada uno de los ángulos interiores del triángulo isósceles ACB.

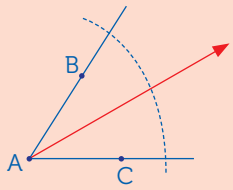
GeoGebra Para resolver

Para usar



PARA LEER ENTRE TODOS

La semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos de igual amplitud se llama **bisectriz**.



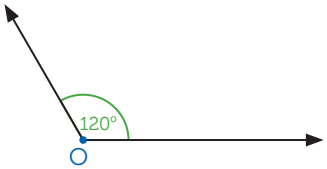
b) Llamen O al punto de intersección de las bisectrices que trazaron. ¿Es posible saber, sin medir, si los triángulos ACO y CBO son congruentes?

De a dos **5** a) Sigan las instrucciones para construir una figura a partir del ángulo de vértice O.

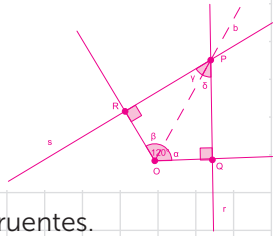
GeoGebra Para resolver

Para usar

- Tracen la bisectriz del ángulo correspondiente al vértice O. Llámenla b.
- Marquen un punto sobre b y llámenlo P.
- Tracen una recta r, que pase por P y sea perpendicular a uno de los lados del ángulo en O.
- Marquen el punto de intersección entre la recta b y el lado del ángulo. Llámenlo Q.
- Tracen una recta s, que pase por P y sea perpendicular al otro lado del ángulo en O.
- Marquen el punto de intersección entre la recta s y el lado del ángulo. Llámenlo R.



Para resolver el ítem b), es probable que los estudiantes no identifiquen que los triángulos OPQ y OPR tienen un ángulo recto, que resulta de la construcción.



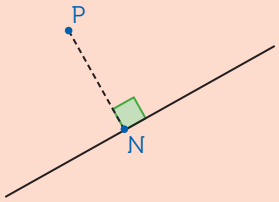
b) Busquen una manera de explicar por qué los triángulos OPQ y OPR son congruentes.
Del mismo modo, tal vez no identifiquen que comparten un lado. El docente podrá invitarlos a detenerse en estas relaciones y en otras necesarias para dar cuenta de la congruencia.

c) ¿Siguen siendo congruentes los triángulos OPQ y OPR si cambia la medida del ángulo de vértice O? ¿Y si cambia la posición del punto P?

La definición de distancia de un punto a una recta será retomada y ampliada en la página 143 involucrando la idea de mínima distancia.

PARA LEER ENTRE TODOS

La **distancia de un punto P a una recta** es la longitud del segmento perpendicular a dicha recta, con un extremo en P y el otro en N, que es la intersección entre el segmento y la recta.



La resolución de la actividad colectiva final puede ser una oportunidad para retomar el "problema del arquero" incluido en la portada del capítulo y relacionarlo con la afirmación. Se puede argumentar que, si el arquero se para sobre la bisectriz del ángulo, se asegura de poder cubrir el arco desde un punto que se encuentra a la misma distancia de los lados del ángulo.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

La siguiente afirmación es verdadera.
Intenten encontrar un modo de justificarla.

Cualquier punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados.

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1 Identifiquen en las páginas del capítulo qué problemas involucra cada uno de los siguientes conceptos:

- Circunferencias y distancia entre puntos.
- Construcción de triángulos a partir de ciertos datos.
- Propiedad de los lados de un triángulo.
- Propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados.
- Clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos.
- Mediatriz de un segmento.
- Alturas de un triángulo.
- Criterios de congruencia de triángulos.
- Bisectriz de un ángulo.

2 Lean las páginas 38, 39 y 40. Allí analizaron algunas relaciones entre circunferencias, distancias y triángulos. ¿Qué cuestiones creen que es importante recordar de los problemas que resolvieron, de las propiedades que estudiaron y de las conclusiones a las que llegaron?

3 Revisen las actividades de la página 41 y elaboren instructivos para la construcción de la mediatriz de un segmento, considerando diferentes grupos de elementos de geometría:

a) regla no graduada y compás;
b) regla graduada y transportador;
c) regla graduada y escuadra.

4 En la página 42 trazaron alturas de triángulos. Revisen cómo lo hicieron y escriban una explicación para un compañero que no haya estado presente en esa clase.

5 Retomen el problema 2 de la página 44. Tracen el segmento BE y decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La figura queda dividida en 4 triángulos congruentes.
b) $\overline{BE}$ está contenido en la bisectriz del ángulo B.
c) $\overline{BE}$ es la altura correspondiente a $\overline{AC}$.
d) $\overline{BE}$ está contenido en la mediatriz de $\overline{AC}$.

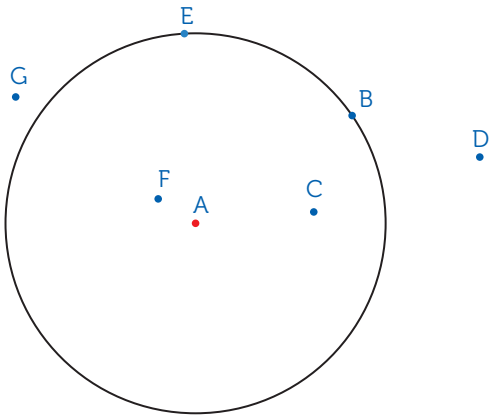
6 Elijan algunos problemas que les hayan resultado complejos y vuelvan a hacerlos entre todos escribiendo en sus carpetas qué aprendieron con esta nueva resolución.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

En este capítulo, los problemas de esta sección que exigen construcciones pueden resolverse con GeoGebra.

PARA HACER EN LA CARPETA

1 En esta figura los puntos B y E están sobre la circunferencia con centro en A y radio de 4 cm.



a) Decidí, sin medir, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- G está a 4 cm de distancia de A.
- El triángulo ABE es isósceles.
- El punto C está a la misma distancia de A que de B.

b) ¿Qué otras afirmaciones sobre esta figura podés elaborar y estar seguro de que se verifican sin necesidad de medir?

2 Construí:

a) Un triángulo ABC equilátero de 4 cm de lado.

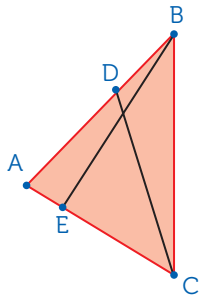
b) Un triángulo DEF isósceles, con dos lados de 4,5 cm y un lado de 6 cm.

c) Un triángulo GHI con un lado de 5,5 cm, otro lado de 3 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 30°.

3 a) Trazá las mediatrices de los lados del triángulo construido en el problema 2, parte a). Llamá D al punto de intersección entre ellas.

b) Decidí, sin medir, si el triángulo ADC dibujado es escaleno. Explicá tu respuesta.

4 En el triángulo ABC se trazaron dos segmentos: DC y EB. Sabemos que $\overline{EB}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$.



a) ¿Por qué el segmento DC no es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$? Justificalo sin medir.

b) Trazá la altura correspondiente al lado AB.

5 Determiná cuántos triángulos ABC distintos se pueden construir en cada caso.

a) $|\hat{A}| = 30°$, $|\hat{B}| = 100°$, $|\hat{C}| = 50°$.

b) $|\overline{AB}| = 3$ cm, $|\overline{BC}| = 6$ cm y $|\overline{CA}| = 4$ cm.

c) $|\overline{AB}| = 3$ cm, $|\overline{BC}| = 4$ cm y $|\overline{CA}| = 8$ cm.

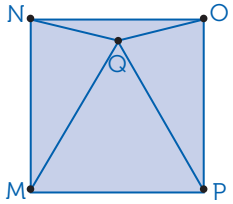
d) $|\hat{A}| = 120°$, $|\overline{AB}| = 5$ cm.

e) $|\hat{A}| = 100°$, $|\hat{B}| = 60°$, $|\hat{C}| = 60°$.

f) $|\overline{AB}| = 2$ cm, $|\overline{BC}| = 4$ cm.

g) $|\overline{AB}| = 2$ cm, $|\overline{CA}| = 4$ cm, $|\hat{A}| = 60°$.

6 Sabiendo que MNOP es un cuadrado y que $\overset{\Delta}{MQP}$ es equilátero, explicá cómo se puede saber sin medir que los triángulos NQM y OQP son congruentes.



7 a) Construí una figura a partir del siguiente instructivo.

- Trazá un ángulo de 40°. Llamá O a su vértice.
- Dibujá una circunferencia de 3 cm de radio con centro en O.
- Marcá los puntos de intersección de la circunferencia con los lados del ángulo. Llamalos A y B.
- Dibujá dos circunferencias de 3 cm de radio, una con centro en A y otra con centro en B. Uno de los puntos de intersección entre ambas circunferencias es O, al otro llamalo C.
- Trazá la semirrecta con origen en O, que pasa por C.
- Marcá los triángulos OAC y OBC.

b) Explicá por qué la semirrecta OC es bisectriz del ángulo con vértice en O.

4 NÚMEROS RACIONALES I

En esta página se proponen actividades que invitan a explorar el uso de las fracciones en el contexto de la elaboración y la venta de alimentos.

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

La **yuca**, también conocida en algunos países de América Latina como **mandioca** o **tapioca**, es un **tubérculo rico en almidón** que se utiliza para distintas preparaciones comestibles.

PLANTA DE YUCA

El bollo de yuca es un puré de yuca envuelto en hojas de maíz. Es un plato popular de la costa de Colombia, y a quienes se ocupan de preparar los bollos se los suele llamar "bolleros".

Los bolleros utilizan baldes, a los que llaman "tobos", para medir la cantidad de yuca que emplean.

Con $3\frac{1}{2}$ tobos se pueden preparar aproximadamente 200 bollos. Tres personas demoran cerca de una hora en pelar la yuca necesaria para hacerlos.

A su vez, realizan un trueque con la cáscara que obtienen al pelar la yuca: dos tobos de cáscara son cambiados por un litro de leche a quienes crían vacas y cerdos.

Triturado de la yuca pelada

PARA PENSAR ENTRE TODOS

- Si los bolleros tienen que preparar mil bollos para vender en los festejos de carnaval, ¿cuántos tobos de yuca necesitan?
- Si un bollero obtuvo $2\frac{1}{2}$ litros de leche, ¿cuántos tobos de cáscara habrá entregado?

Fracciones y equivalencias

Los problemas de estas páginas abordan el trabajo con fracciones a partir de situaciones que implican determinar longitudes, identificar partes de un entero y establecer relaciones entre partes y enteros. Se incluyen actividades en las que la unidad no entra una cantidad entera de veces en la magnitud a medir, promoviendo de este modo partir la unidad. También se busca determinar medidas en relación con una unidad, estableciendo si son o no equivalentes.

De a dos

1 La tira verde representa $\frac{1}{4}$ de cierto entero.

El problema 1 a) busca que los alumnos identifiquen que una parte es 1/4 si 4 de esas partes forman el entero. Se trata de retomar la definición de una fracción desde la parte al todo.

a) Dibujen dos enteros posibles.

b) ¿Cuántas tiras verdes se necesitan para formar dos enteros? ¿Y dos enteros y medio?

Si los alumnos no tuvieron mayores dificultades en la resolución del problema 1, los problemas 2 y 3 podrían proponerse de tarea.

2 El siguiente dibujo representa $\frac{1}{5}$ de un segmento completo. Dibujá el segmento entero.

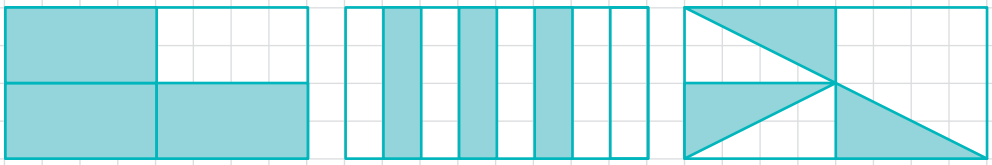
Graduada Para usar

3 ¿Cuánto medirá otro segmento que sea $\frac{1}{3}$ de esta unidad?

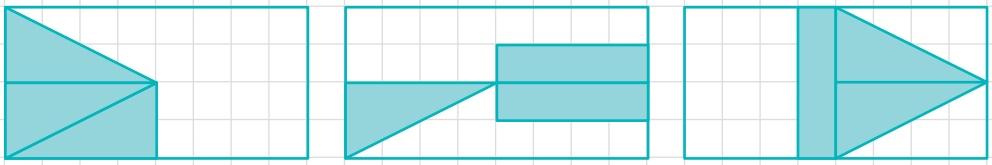
Graduada Para usar

De a dos

4 Las siguientes figuras son rectángulos. ¿En cuál o cuáles están pintados $\frac{3}{8}$ del rectángulo?



El problema 4 busca que los alumnos recurran a las fracciones para determinar áreas. Se espera analizar junto con ellos que las partes pueden tener distintas formas y, sin embargo, representar la misma porción del entero.



PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Se dice que una cantidad es, por ejemplo, $\frac{1}{4}$ de una unidad, si con 4 de esas cantidades se forma la unidad. A su vez, si una unidad se divide en 4 partes iguales, cada una de ellas representa $\frac{1}{4}$ de la unidad. Así, 3 partes de $\frac{1}{4}$ de una unidad equivalen a $\frac{3}{4}$ de esa unidad.

De a dos **5** Esta tira representa $\frac{1}{4}$ de cierta unidad.

El problema 5 apunta a que los alumnos identifiquen fracciones equivalentes a partir de considerar la cantidad de partes iguales de una unidad que representan. En este caso, 3/4 de la unidad representa 3 partes de 1/4 de la unidad y lo mismo ocurre con 6/8. El docente podrá realizar la escritura 3/4 = 6/8 y establecer con los alumnos que al duplicar la cantidad de partes en las que se divide el entero, la cantidad de tiras se duplica también. Para validarlo pueden apoyarse en la relación entre cuartos y octavos. Como 1/8 es la mitad de 1/4, 2/8 = 1/4. Por lo tanto, 6/8 = 2/8 + 2/8 + 2/8 = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4.

a) Franco dice que tres de esas tiras cubren el mismo largo que 6 tiras de $\frac{1}{8}$ de la misma unidad.
Gael dice que $\frac{3}{4}$ de la unidad es lo mismo que $\frac{6}{8}$ de la unidad.
¿Será cierto lo que dice cada uno de estos chicos?

b) Juana dice que $\frac{15}{20}$ de la unidad es lo mismo que $\frac{6}{8}$ de la unidad, y Lucía le dice que no. ¿Cuál de las dos tiene razón?

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ porque $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ es el doble de $\frac{1}{6}$.

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ porque $\frac{1}{9}$ es la tercera parte de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ es el triple de $\frac{1}{9}$.

Dos fracciones son **equivalentes** si representan el mismo número. Por ejemplo, $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{6}{12}$ porque ambas representan el mismo número: $\frac{1}{2}$.

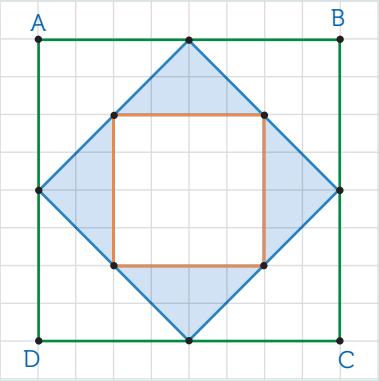
De a dos **6** Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si un segmento mide $\frac{7}{5}$ de una unidad, el doble medirá $\frac{14}{10}$ de la unidad.

b) Si un segmento mide $\frac{2}{6}$ de una unidad, la mitad medirá $\frac{1}{3}$ de esa unidad.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

- ¿Qué parte del cuadrado ABCD representa el sector azul?
  Expliquen y justifiquen sus respuestas.



Cálculos con fracciones

En estas páginas se proponen problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre números racionales.

De a dos

1 ¿Cuál o cuáles de las siguientes fracciones pueden escribirse como suma de medios? ¿Y como suma de cuartos?

$\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{15}{20}$ $\frac{17}{20}$ $\frac{7}{28}$ $\frac{24}{8}$

2 Resolvé los siguientes cálculos.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} =$

b) $\frac{6}{10} - \frac{2}{5} + \frac{3}{2} =$

c) $\frac{4}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{12} =$

d) $\frac{7}{5} + \frac{3}{10} - \frac{8}{20} =$

e) $\frac{3}{5} \cdot 4 =$

f) $3 \cdot \frac{4}{7} =$

El problema 2 busca que los alumnos recuperen algunos recursos asociados a la suma y resta de fracciones, ya sea apelando a cálculos algorítmicos o al uso de fracciones equivalentes. Para los ítems e) y f) se espera que puedan identificar que la suma reiterada también permite resolver los productos.

De a dos

3 En los últimos 5 meses los precios aumentaron $\frac{1}{4}$ de su valor. Completen la tabla.

Precios de hace 5 meses ($)	8	12	20	30	40	60	80
Aumentos							
Precios actuales ($)							

De a dos

4 Completen los siguientes cálculos para que las igualdades sean verdaderas.

a) $\frac{1}{5} \cdot$ _____ $= 1$

b) $\frac{2}{3} \cdot$ _____ $= 2$

c) $\frac{2}{3} \cdot$ _____ $= 1$

d) $\frac{5}{2} \cdot$ _____ $= 1$

Para resolver el problema 4, los alumnos podrán apoyarse en la definición de fracción y en su relación con el entero, apelar a la suma reiterada o bien descomponer la fracción como una de numerador 1 antes de comenzar a operar. Por ejemplo, 5/2 = 5 · 1/2; por lo tanto, 5 · 1/2 · 2 · 1/5 = 1, y de allí que 5/2 · 2/5 = 1.

PARA LEER ENTRE TODOS

El **inverso multiplicativo** de un número racional $\frac{a}{b}$, distinto de 0, es el número racional $\frac{b}{a}$, ya que al multiplicarlo por $\frac{a}{b}$ da como resultado 1. Por ejemplo: $\frac{11}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{11}$ porque $\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7} = 1$.

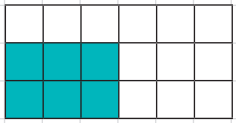
De a dos

5 De un campo rectangular se va a destinar un sector que ocupa $\frac{3}{4}$ de su ancho y $\frac{2}{5}$ de su largo para hacer un galpón. ¿Qué parte del terreno se usará?

Para hacer en la carpeta

Los alumnos podrían resolver el problema 6 de diferentes maneras. Por ejemplo, identificar qué fracción del entero representa la parte sombreada para, posteriormente, analizar los cálculos propuestos. También es posible que comiencen analizando los cálculos y descarten algunos. Por ejemplo, los tres primeros cálculos pueden descartarse ya que representan cantidades que superan o igualan el entero.

6 ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos permiten averiguar qué parte del rectángulo está pintada?



$2 \cdot 3$ | $\frac{3}{6} \cdot 2$ | $\frac{2}{3} \cdot 3$ | $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6}$ | $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{2}$

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

El **producto entre dos fracciones** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puede calcularse como $\frac{ac}{bd}$. Es decir, como una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador, el producto entre los denominadores de las fracciones que se multiplican.

Entre todos

7 Para saber por qué número hay que multiplicar a $\frac{1}{3}$ para obtener $\frac{2}{5}$, Martina hizo lo siguiente:

Para hacer en la carpeta

$\frac{1}{3} \cdot \_\_\_ = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

Se sabe que el procedimiento de Martina es correcto.

a) ¿Cómo puede estar segura de que $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$?

b) ¿De dónde sale el número $\frac{6}{5}$?

c) Averigüen el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

El problema 7 busca poner en debate algunas relaciones involucradas en la multiplicación entre fracciones, a partir de la idea de inverso multiplicativo.

$\frac{1}{3} \cdot \_\_\_ = \frac{7}{6}$ | $\frac{1}{3} \cdot \_\_\_ = \frac{2}{15}$ | $\frac{1}{5} \cdot \_\_\_ = \frac{9}{4}$ | $\frac{3}{4} \cdot \_\_\_ = \frac{19}{6}$

8 Usando que $1 : \frac{1}{5} = 5$, encontrá los resultados de los siguientes cálculos.

a) $2 : \frac{1}{5} =$

b) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} =$

c) $3 : \frac{1}{5} =$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{5} =$

e) $\frac{3}{2} : \frac{1}{5} =$

f) $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} =$

9 Usando que $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, determiná los resultados de los siguientes cálculos.

Para hacer en la carpeta

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{40}{5} =$

b) $\frac{10}{3} \cdot \frac{4}{5} =$

c) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} =$

d) $\frac{8}{15} : \frac{1}{5} =$

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

El **cociente entre dos fracciones** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puede calcularse como $\frac{ad}{bc}$. Es decir, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

DECIDIR SI ES VERDADERO O FALSO ENTRE TODOS

Decidan si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. El número **a** es diferente de 0.

$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{8}{15}$ | $2 : \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$ | $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ | $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ | $a \cdot \frac{1}{a} = a$

En estas páginas se propone un trabajo en torno a la fracción como razón entre cantidades y magnitudes, así como la comparación de proporciones.

Las fracciones, la razón y la proporción

1 El domingo se registraron 148 milímetros de agua de lluvia en dos horas, y el martes, 100 milímetros en una hora y cuarto. ¿En cuál de estos días la intensidad de la lluvia fue mayor?

De a dos

2 En una preparación se mezclan 5 tazas de agua con 3 tazas de cereal.

a) Completen la tabla que relaciona la cantidad de tazas de agua y de cereal que se necesitan para obtener la misma consistencia.

Tazas de cereal		1	2	3	4	5	6	
Tazas de agua	1			5				15

b) Si se quiere obtener la misma consistencia pero usando 6 tazas de agua, ¿cuántas tazas de cereal se deberán usar?

c) Si a una preparación de 5 tazas de agua y 3 tazas de cereal se le agregan una taza de agua y una de cereal, ¿se obtiene una consistencia más firme o más líquida?

d) Decidan si con las siguientes preparaciones se obtiene la misma consistencia:

- 12 tazas de cereal y 20 tazas de agua.
- 21 tazas de cereal y 35 tazas de agua.

En la resolución del problema 2 d) se podrá proponer una discusión sobre la igualdad entre razones asociada a la conservación de la proporción.

3 Para preparar una bebida se mezclan 3 litros de jugo de pera concentrado con 10 litros de agua.

Para hacer en la carpeta

a) Norma quiere preparar la bebida con el mismo gusto usando 4 litros de jugo concentrado. ¿Qué cantidad de agua tendrá que usar?

b) Si usa 12 litros de agua, ¿cuántos litros de jugo concentrado necesita?

c) Escribí otras mezclas con las que se obtenga el mismo gusto.

El problema 3 implica un trabajo matemático similar al del problema 2; es por ello que, si el docente lo considerara conveniente, podría quedar como tarea.

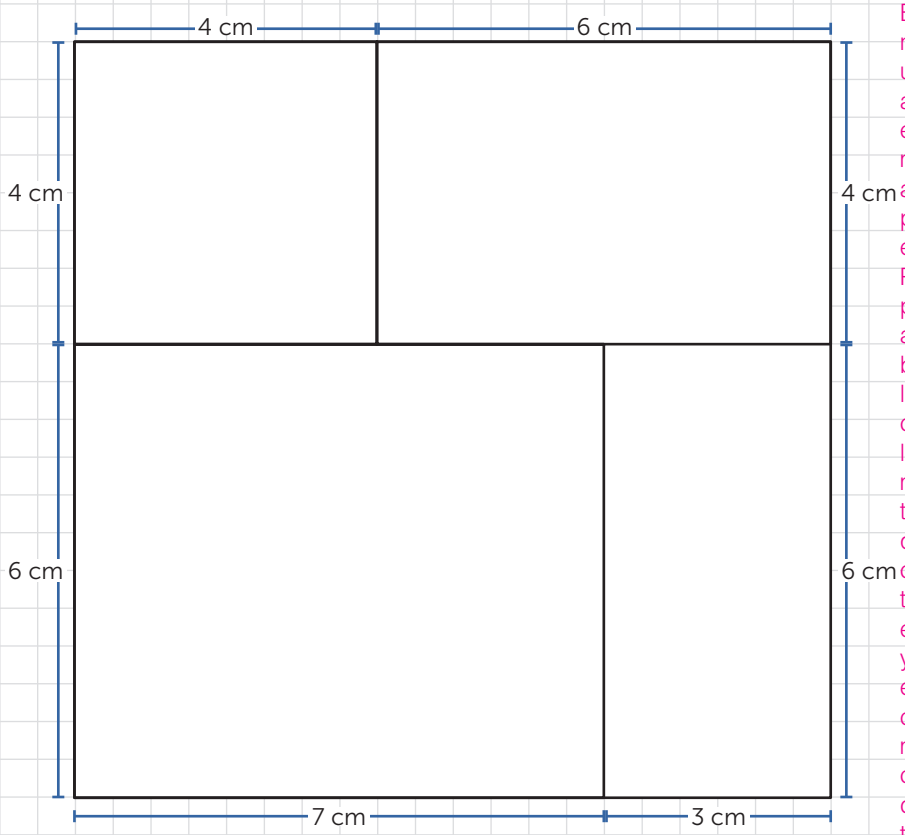
d) Si a una mezcla de 3 litros de jugo concentrado y 10 litros de agua le agrega 1 litro de cada uno, ¿obtiene jugo más o menos concentrado?

e) Con las siguientes mezclas, ¿se obtiene jugo con el mismo gusto?

- 6 litros de jugo concentrado y 10 de agua.
- 18 litros de jugo concentrado y 35 de agua.

De a dos **4** Este rompecabezas tiene cuatro piezas.

a) Se quiere obtener un nuevo rompecabezas con la misma forma que el anterior, pero en el que la parte que mide 4 cm pase a medir 5 cm. Completen la tabla con las medidas faltantes.



Medidas originales (cm)	3	4	6	7
Medidas nuevas (cm)		5		

El problema 4 propone una ampliación y una reducción. Si los alumnos no se han enfrentado a problemas de este tipo en años anteriores, es posible que utilicen estrategias aditivas. Por ejemplo, en a) podrían sumar 1 cm a cada cantidad, o bien sumar 1 cm al lado de 4 cm y otras cantidades fijas a los demás lados, de manera de aumentar todas las medidas y que el rompecabezas cierre. Será interesante poner en discusión este tipo de error y confrontarlo con estrategias multiplicativas que permiten mantener la proporción. En este caso, deberán multiplicar todas las medidas por 5/4 en a) y por 3/4 en b).

b) ¿Qué cálculos habría que hacer para obtener las nuevas medidas de otro rompecabezas con la misma forma, pero en el que el lado que mide 4 cm pase a medir 3 cm?

DECIDIR SI ES VERDADERO O FALSO ENTRE TODOS

Con pintura blanca y con pintura negra se realizan dos mezclas:

- La mezcla A se obtiene con 5 litros de blanco y 3 litros de negro.
- La mezcla B se obtiene con 7 litros de blanco y 4 litros de negro.

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- La pintura A es más clara que la pintura B.
- Si a la mezcla A se le agrega 1 litro de cada color, se obtiene pintura con la misma tonalidad.
- Si se quiere hacer pintura de la misma tonalidad que B usando 2 litros de pintura blanca, se necesitan $\frac{2}{7}$ litros de negro.

Fracciones y porcentajes

En los problemas de estas páginas se propone que los alumnos identifiquen al porcentaje como una relación de proporcionalidad directa.

1 Completá el siguiente cuadro, en el que se muestran los resultados de las elecciones del centro de estudiantes de la escuela.

Para resolver el problema 1 los alumnos podrían apelar a las diferentes propiedades y técnicas asociadas a la proporcionalidad directa.

Para resolver

Para resolver

Agrupación estudiantil	Cantidad de votos	Porcentaje de votos
Estudiantes al Frente		6%
Utópicos		9%
Revolución y Cambio	360	30%
Juventud Unida	540	45%
Frente Estudiantil		10%
Total	1.200	100%

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

El **porcentaje** se utiliza para representar una razón –es decir, un cociente entre dos cantidades–, en la que se considera a 100 como la cantidad de referencia y se simboliza con %. Por ejemplo, 50% se lee "cincuenta por ciento" y representa $\frac{50}{100}$ de una cantidad.

2 a) Un precio de $300, ¿puede sufrir un aumento de 120%? Si creés que sí, explicá cómo encontrar el nuevo precio. Si creés que no, explicá por qué.

El problema 2 apunta a desarrollar una reflexión en torno a la posibilidad o no de trabajar con porcentajes mayores que 100%. En a) se busca que los alumnos reconozcan que el aumento puede ser del 120% y, por lo tanto, mayor que el precio original. En cambio, en b), ese porcentaje no tiene sentido en el contexto propuesto.

b) En una fábrica trabajan 300 personas. ¿Puede ausentarse el 120% de los empleados? Si creés que sí, explicá cómo encontrar cuántos empleados faltaron. Si creés que no, explicá por qué.

3 La boleta de gas se incrementó en un 400%, ¿es verdad que se cuadruplicó el costo?

Para resolver

Para resolver

En el problema 3 los alumnos podrían responder que sí, que es cierto que se cuadruplicó el costo. En ese caso será necesario que noten que si bien el aumento es del cuádruple del precio original, ese incremento deberá ser sumado al valor original de la boleta. El nuevo precio es el quíntuple del precio anterior.

Entre todos

4 Busquen diferentes maneras de calcular el 17% de 5.800 usando calculadoras. Intenten que algunas maneras impliquen usar la tecla "%" y otras, no.

Para resolver

Para resolver

5 Hugo es pediatra y cobra $600 la consulta. Quiere aumentar un 15%. ¿Cómo podría usar la calculadora para determinar, con un solo cálculo, el nuevo precio de la consulta?

Para resolver

Para resolver

Es posible que algunos estudiantes, al resolver el problema 5, calculen inicialmente el nuevo precio realizando dos cálculos: el que permite obtener el aumento del 15% y luego una suma para determinar el precio total. El docente podrá propiciar el análisis del porcentaje que representa el precio final respecto del original, y que se discutan las razones por las cuales la multiplicación 600 · 1,15 permite resolver el problema.

De a dos

6 a) En un comercio una camisa cuesta $1.500. El vendedor marca en su calculadora 1.500 · 0,75 y le cobra al cliente lo que marca el visor. ¿Creen que le hizo un descuento o le aumentó el precio? ¿De qué porcentaje?

b) El mismo vendedor atiende a otro cliente que paga con tarjeta, y marca en su calculadora 700 · 1,35 para saber cuánto cobrarle. ¿Creen que aplicó un descuento o un aumento del precio original? ¿De qué porcentaje?

El problema 6 permite tratar de recuperar la propiedad por la cual si se multiplica un número por otro menor que 1, el número "se achica", mientras que si se multiplica por un número mayor que 1, el número "se agranda", y su relación con el cálculo de porcentajes.

De a dos

7 Escriban un único cálculo para hallar cada porcentaje, sin usar la tecla %.

a) El 25% de 1.200.

b) El 250% de 48.

c) El 50% de 25.

d) El 75% de 120.

e) El 150% de 200.

f) El 300% de 24.

DECIDIR SI ES VERDADERO O FALSO ENTRE TODOS

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El 25% de **a** es $\frac{1}{4}$ **a**.
- $\frac{3}{4}$ + **a** indica un aumento del 75% sobre el valor de **a**.
- Un objeto cuesta **b** pesos y aumenta un 37%. Para calcular el nuevo precio es posible hacer 1,37 **b**.
- En un pueblo viven **a** cantidad de habitantes. El 12% se va a vivir a otro pueblo. Para calcular cuántos habitantes quedan se puede hacer 88 **a** : 100.
- Si **a** es más grande que **b**, el 5% de **a** es mayor que el 5% de **b**.

Fracciones y fórmulas

En los problemas de estas páginas se propone volver sobre los temas trabajados en el capítulo, pero en esta oportunidad a través del uso de letras. Se trata de generalizar algunas relaciones y avanzar en la producción de fórmulas a partir del análisis de procesos que varían, extendiendo el trabajo realizado en capítulos anteriores.

1 Una tira **T** entra 5 veces en una tira **N**. Decidí cuál o cuáles de las siguientes igualdades permiten representar la relación entre las dos tiras.

$5\mathbf{N} = \mathbf{T}$

$5\mathbf{T} = \mathbf{N}$

$\frac{\mathbf{T}}{5} = \mathbf{N}$

$\frac{\mathbf{N}}{5} = \mathbf{T}$

$\frac{1}{2}\mathbf{N} = \frac{5}{2}\mathbf{T}$

$\frac{1}{2}\mathbf{T} = 10\mathbf{N}$

$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{T}} = 5$

$\frac{\mathbf{T}}{4} = 20\mathbf{N}$

El problema 1 propone analizar las diferentes relaciones que se pueden establecer entre la longitud de una tira y algunas de sus subdivisiones.

2 En cada caso, ubicá en la recta numérica las fracciones que se proponen.

Para usar

a) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ y $\frac{5}{4}$.

b) $\frac{1}{2}\mathbf{n}$; $\frac{1}{4}\mathbf{n}$ y $\frac{3}{4}\mathbf{n}$, donde **n** representa cualquier número natural.

c) $\frac{\mathbf{n}+1}{2}$ y $\frac{\mathbf{n}+1}{4}$.

El problema 2 busca que los alumnos interpreten las expresiones fraccionarias desde algunas de sus características y puedan relacionarlas con los datos que se ofrecen en cada caso. Por ejemplo, que puedan identificar en el ítem c) que, al disponer de la ubicación del 0, el 1 y el valor n en la recta, n + 1 se ubicará 1 a la derecha de n, y, en consecuencia, (n + 1)/2 se ubicará justo en el medio entre 0 y (n + 1).

3 ¿Es posible encontrar una fracción **a** de manera que $\mathbf{a} \cdot \frac{7}{4}$ sea menor que 1?

Para resolver

Para resolver

De a dos

El problema 4 apunta a trabajar con la información que porta una expresión. Los alumnos podrán probar con algunos números a fin de aproximarse a un análisis de las condiciones que podrían hacer válida la relación. No se pretende que resuelvan inecuaciones. En el ítem a) se espera que se apoyen en que el menor número natural es 1, y siempre se le suma algo positivo, por lo que la suma será mayor que 1. En tanto que en el ítem b) se espera que los estudiantes analicen que cuando n = 1, la expresión da 2, mientras que si n es mayor o igual que 2, la suma será mayor, porque al número n se le suma un número positivo.

4 a) Si **n** es un número natural, ¿será cierto que $\mathbf{n} + \frac{1}{\mathbf{n}}$ es siempre mayor que 1?

b) Si **n** es un número natural, ¿será cierto que $\mathbf{n} + \frac{1}{\mathbf{n}}$ es siempre mayor o igual que 2?

De a dos

5 Para preparar 1 kg de arroz con leche hacen falta $\frac{3}{4}$ kg de arroz. Si se designa con la letra **b** la cantidad de arroz con leche y con la letra **a** la cantidad de arroz necesaria, ¿cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan la relación entre ambas cantidades?

$b \cdot \frac{3}{4} = a$ $\quad a \cdot \frac{3}{4} = b$ $\quad b + \frac{3}{4} = a$ $\quad a + \frac{3}{4} = b$ $\quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

6 Si para preparar una bebida se mezclan 3 litros de jugo concentrado con 10 litros de agua, y se designa con la letra **j** la cantidad de jugo concentrado y con la letra **a** la cantidad de agua que se necesita, ¿cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan la relación entre ambas cantidades?

$j + \frac{10}{3} = a$ $\quad j \cdot 10 = 3a$ $\quad a \cdot \frac{10}{3} = j$ $\quad j + 3 = a + 10$

$\frac{j}{a} = \frac{3}{10}$ $\quad j \cdot \frac{10}{3} = a$ $\quad \frac{a}{j} = \frac{10}{3}$ $\quad a \cdot \frac{3}{10} = j$

Entre todos

7 Decidan, en cada caso, si las dos expresiones son equivalentes, suponiendo que **n** es un número natural cualquiera.

a) $\frac{1}{4}n$ y $\frac{3}{8}n - \frac{1}{8}n$

b) $\frac{n-1}{2}$ y $\frac{1}{2}n - 1$

c) $\frac{n+1}{n}$ y $1 + \frac{1}{n}$

d) $\frac{6-3n}{2}$ y $3 - \frac{3}{2}n$

e) $\frac{n}{2} + 4n$ y $\frac{9}{2}n$

f) $\frac{n}{3} + n$ y $\frac{2}{3}n$

Los problemas 7 y 8 tienen la intención de que los alumnos avancen en el tratamiento de expresiones racionales. El docente podrá poner en relación algunos recursos que los alumnos podrían utilizar de modo más "artesanal" o intuitivo con ciertas técnicas relativas a las fracciones equivalentes y al cálculo. Por ejemplo, en el ítem e) del problema 7 es posible que muchos alumnos resuelvan directamente 1/2 + 4 y obtengan 9/2, oportunidad para volver sobre la propiedad distributiva (o la extracción del factor común). Es muy probable que el docente deba aclarar que a algunas expresiones que se presentan escritas de cierta manera conviene transformarlas en otras equivalentes; por ejemplo, que n/3 equivale a 1/3 n.

De a dos

8 Busquen, en cada caso, un valor para **m** que haga verdadera la igualdad.

a) $\frac{1}{4}m + 1 = 2$

b) $\frac{m}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{4}m + m = \frac{7}{4}$

d) $\frac{1}{3}m + \frac{1}{3} = m$

DECIDIR SI ES VERDADERO O FALSO ENTRE TODOS

La fórmula 5**b** = 8**r** representa la relación entre la cantidad de pintura blanca (**b**) y la cantidad de pintura roja (**r**) para obtener cierta tonalidad.

Decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Para obtener la tonalidad deseada es necesario mezclar, cada 5 litros de pintura roja, 8 litros de pintura blanca.
- Para obtener la tonalidad deseada, si se duplica la cantidad de pintura blanca es necesario duplicar la cantidad de pintura roja.
- Si se utilizaron $\frac{1}{3}$ litros de pintura roja, es necesario mezclar $\frac{8}{15}$ litros de pintura blanca.

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1. Seleccionen el problema de las páginas 54 y 55 que les haya parecido más difícil. Escriban por qué les parece difícil y también un consejo para resolverlo.

2. Indiquen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

   a) La suma de dos números racionales nunca da como resultado un número natural.
   b) El producto de dos números racionales siempre da como resultado un número mayor que 1.
   c) La división de un número racional por un número natural siempre da como resultado un número menor que 1.

3. Luego de volver a mirar las páginas 56 y 57, inventen un problema en el que sea necesario el uso de los porcentajes para resolverlo.

4. ¿Cómo le explicarían a un compañero la forma de usar la calculadora para determinar, con un solo cálculo, el valor final de un precio que fue incrementado en un 15%?

5. La siguiente es la receta tradicional colombiana para preparar los "bollos de yuca".

Ingredientes para 15 bollos

1.000 gramos de yuca
1 cucharadita de azúcar
25 gramos de coco rallado
Sal a gusto
30 hojas de mazorca
450 cm de hilo para amarrar

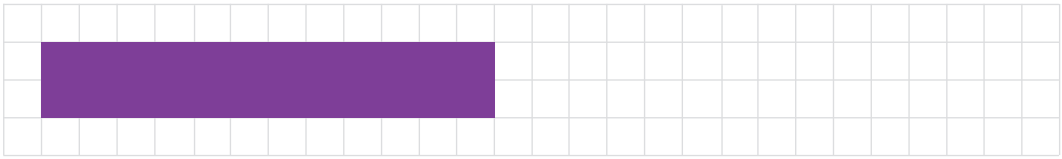
   a) ¿Cuál sería la receta si se quisieran preparar 45 bollos? ¿Y si se quisieran preparar 3?
   b) Lautaro tiene preparados 360 cm de hilo. ¿Cuántos bollos tiene planeado elaborar?
   c) ¿Qué ideas trabajadas en el capítulo ayudaron a responder cada una de las preguntas?

6. Vuelvan a mirar los problemas que resolvieron en este capítulo, completen los que hayan quedado sin resolver y revisen los errores. Anoten las dudas que les surjan para aclararlas entre todos.

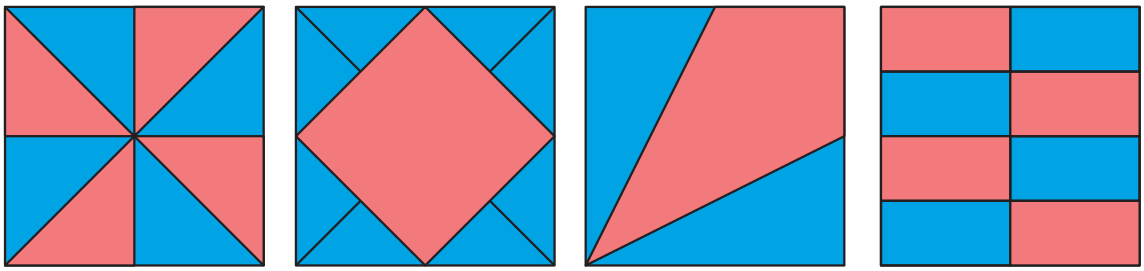
PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Este rectángulo representa $\frac{3}{4}$ de un entero. Dibujá dos enteros posibles.



2 ¿Qué fracción de cada figura representa la parte rosa?



3 ¿Cuáles de las siguientes fracciones pueden escribirse como sumas de octavos?

$\frac{42}{4}$ $\frac{23}{2}$ $\frac{17}{16}$ $\frac{15}{32}$ $\frac{18}{32}$ $\frac{24}{40}$

4 Resolvé cada uno de los cálculos.

a) $\frac{3}{5} + \frac{8}{10} =$

b) $\frac{3}{4} \cdot 2 =$

c) $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} =$

5 Completá la siguiente tabla, que relaciona la cantidad de harina que es necesario comprar en función de la cantidad de pizzas que se van a preparar, sabiendo que para cada pizza se calcula la misma cantidad.

Cantidad de pizzas a preparar	1	2	5	10	14
Cantidad de harina que es necesario comprar (kilogramos)				2	

6 Averiguá el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

a) $\frac{1}{4} \cdot \_\_ = \frac{7}{8}$

b) $\frac{1}{5} \cdot \_\_ = \frac{9}{10}$

c) $\frac{5}{6} \cdot \_\_ = \frac{15}{6}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \_\_ = \frac{8}{9}$

7 Resolvé los cálculos.

a) $2 : \frac{1}{3} =$

b) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} =$

c) $3 : \frac{1}{3} =$

d) $5 : \frac{1}{3} =$

8 ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por 7 dé 11?

9 ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{1}{7}$ dé 17?

10 ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{3}{4}$ dé $\frac{5}{6}$?

11 Ubicá los siguientes números en una recta numérica: 0; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$.

12 ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{2}{3}$ dé como resultado un número mayor que 1?

13 ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{4}{3}$ dé como resultado un número menor que 1?

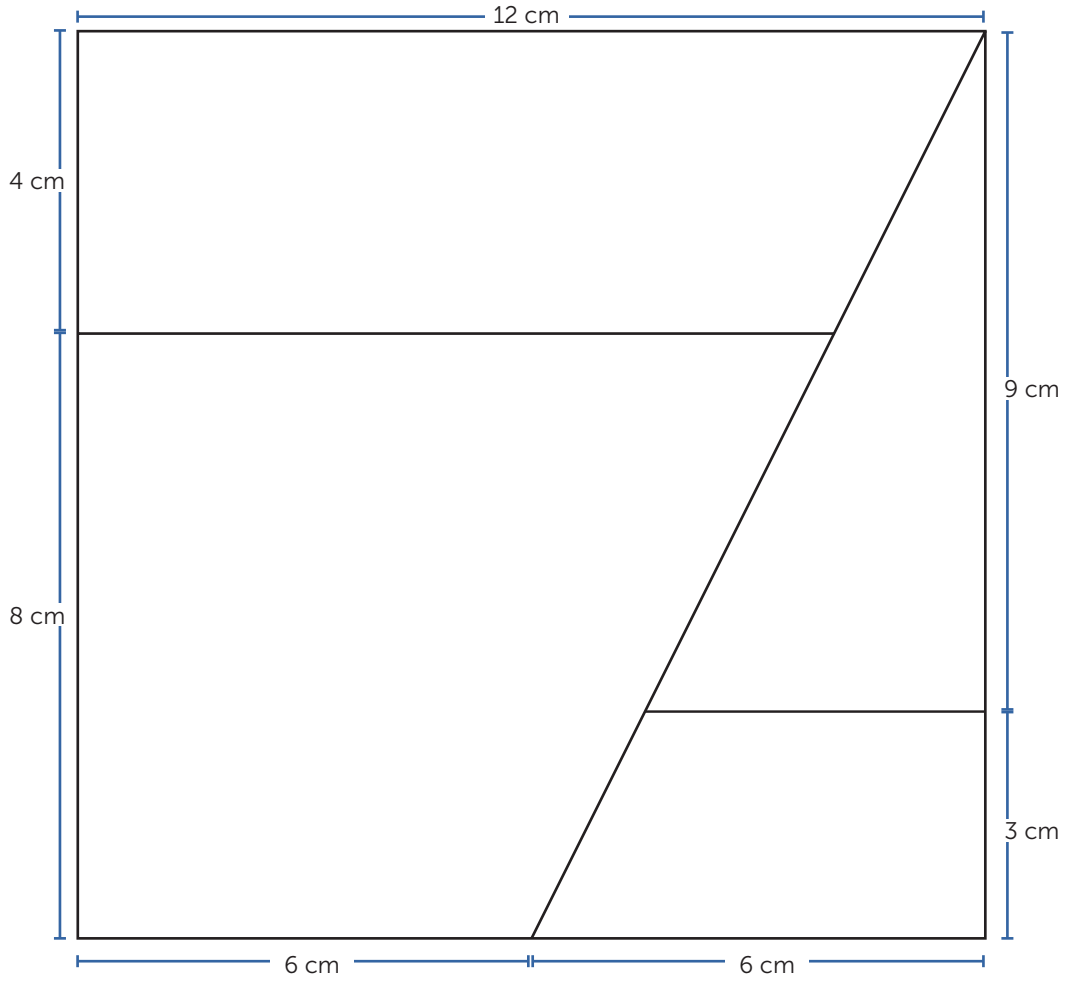
PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Para preparar una mezcla, un albañil utiliza 6 baldes de arena por cada 2 baldes de cemento.

a) Si se quiere preparar la misma mezcla usando 4 baldes de arena, ¿cuántos de cemento se necesitan?
b) Si a una mezcla de 2 baldes de cemento y 6 baldes de arena se agrega un balde de cada uno, ¿se obtiene la misma concentración?
c) Escribí otras mezclas que den la misma concentración.

2 El siguiente rompecabezas tiene cuatro piezas. Escribí las nuevas medidas de las piezas de otro rompecabezas con la misma forma, pero de manera que el segmento que mide 6 cm pase a medir 14 cm.



3 Un auto recorre 110 km en una hora y cuarto mientras que una camioneta recorre 50 km en media hora. ¿Qué vehículo va más rápido?

4 A una reunión fueron convocadas 45 personas y se registró una asistencia del 20 por ciento.

a) ¿Cuántas personas asistieron?

b) ¿Se podría haber registrado una asistencia del 110%? Si pensás que sí, indicá cuántas personas hubiesen estado presentes. Si pensás que no, explicá por qué.

5 Un vendedor tiene que anotar en la vidriera los nuevos precios con un aumento del 20%. ¿Por cuánto tiene que multiplicar cada precio viejo para obtener el nuevo con el aumento, si quiere hacer una sola cuenta para cada uno?

6 ¿Es posible encontrar una fracción **a** de manera que $\mathbf{a} \cdot \frac{8}{15}$ sea mayor que 1?

7 Para preparar 1 kg de pan dulce hace falta $\frac{1}{4}$ kg de frutas secas. Si se designa con la letra **d** la cantidad de pan dulce y con la letra **f** la cantidad de frutas secas necesarias, ¿cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan la relación entre ambas cantidades?

$\mathbf{d} + \frac{1}{4} = \mathbf{f}$ $\mathbf{d} \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{f}$ $\mathbf{f} \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{d}$ $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{d}} = \frac{1}{4}$

8 Lucía va a comprar helado para su cumpleaños. Decide comprar un kilogramo cada tres invitados.

a) ¿Qué cantidad de helado tendrá que comprar si invita a 7 personas? Escribí el cálculo que hiciste para saberlo.

b) ¿Qué cantidad de helado tendrá que comprar si invita a 1 persona? Escribí el cálculo que hiciste para saberlo.

9 La fórmula $\mathbf{d} = 1{,}05 \cdot \mathbf{p}$ representa el nuevo precio de un producto en función de su precio anterior, **p**.

a) ¿Qué porcentaje de aumento o de descuento tiene el nuevo precio respecto del anterior? Intentá responder sin hacer cuentas.

b) Hallá el nuevo precio de un producto cuyo precio anterior era de $200.

c) ¿Cuál era el precio anterior de un producto cuyo nuevo precio es de $330,75?

d) Si el porcentaje de aumento hubiera sido el 16%, ¿cuál sería la fórmula?

Se propone en esta página propiciar un debate con los alumnos en términos de relaciones que involucran ternas pitagóricas. Se trata de desarrollar un trabajo netamente exploratorio.

5 FUNCIONES

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

Desde la Antigüedad, las mujeres y los hombres que se dedicaron a estudiar distintos fenómenos naturales y relaciones numéricas necesitaron tomar notas de las observaciones que realizaban. Los datos registrados eran analizados con el objeto de establecer relaciones entre ellos.

En las tablas de cálculo babilónicas, de hace más de tres mil años, está presente la intención de encontrar relaciones generales por la que se asocian elementos de distintos conjuntos.

Plimpton 322 es una tablilla de barro de Babilonia que se destaca por contener lo que ahora se llama **ternas pitagóricas**. Es decir, números enteros **a**, **b**, **c**, que satisfacen $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Por ejemplo, **a** = 3, **b** = 4 y **c** = 5 es una terna de números que verifica:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$9 + 16 = 25$$

Según diferentes estudios, los babilonios trabajaban con triángulos rectángulos para tratar de analizar sus propiedades y características, partiendo al medio un rectángulo por su diagonal, a fin de poder relacionar también los lados con los ángulos de este tipo de triángulos.

Cerca de 2.500 años después, los pitagóricos en Grecia estudiaron estas ternas, y por eso hoy se las conoce como ternas pitagóricas.

TABLILLA PLIMPTON 322, BABILONIA.

PARA PENSAR ENTRE TODOS

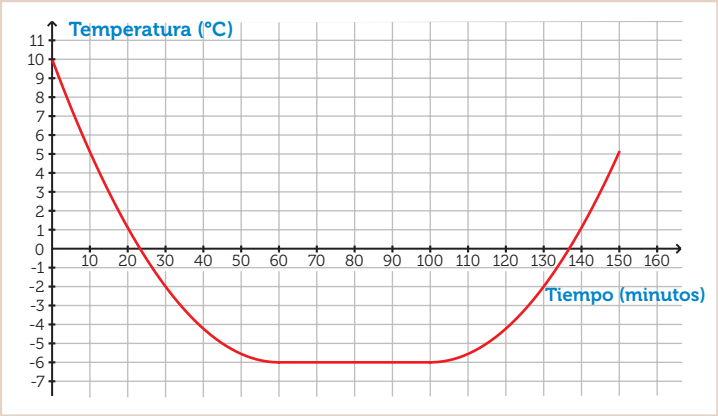
- En la tabla se muestran algunas ternas pitagóricas incompletas. Completen con los números que faltan.
- ¿Es cierto que si se duplica el valor de todos los números de una terna pitagórica se obtiene una nueva terna pitagórica?

a	b	c
3	4	5
5	12	
	24	25
8		17

Representaciones gráficas I

En estas páginas se propone comenzar a trabajar sobre la noción de función a partir de la lectura e interpretación de gráficos cartesianos. Hacia el final se introduce la notación convencional sobre funciones.

De a dos **1** El siguiente gráfico representa la temperatura de una sustancia desde el momento en que se la introdujo en un congelador.



a) ¿Cuál era la temperatura de la sustancia a los 30 minutos? ¿Y a los 60 minutos?

b) ¿Es cierto que a los 120 minutos la temperatura de la sustancia era de −4 °C? ¿En algún otro momento tuvo la misma temperatura?

c) ¿Cuál fue la temperatura mínima que alcanzó la sustancia? ¿Y la máxima? ¿En qué momento alcanzó cada una?

PARA LEER ENTRE TODOS

Algunos gráficos se usan para efectuar una representación que permite visualizar de qué manera se relacionan dos magnitudes y cómo se modifica una en función de la otra. Como las magnitudes pueden variar, se las llama **variables**.

Cuando se relacionan dos variables es posible saber si una depende de la otra. Por ejemplo, si se considera la temperatura corporal de un paciente y la hora en que se registró, puede decirse que la temperatura depende del tiempo, ya que esta podría tomar diferentes valores según el momento del día. En este caso se dice que la temperatura es la **variable dependiente** y que el tiempo es la **variable independiente.**

En los gráficos, la **variable independiente** suele representarse en el eje horizontal y la **variable dependiente**, en el vertical.

De a dos **2** Olivia fue caminando desde su casa hasta la oficina del correo de su barrio a buscar un paquete. El siguiente gráfico representa la distancia de Olivia a su casa desde que comenzó el recorrido hasta que regresó del correo.

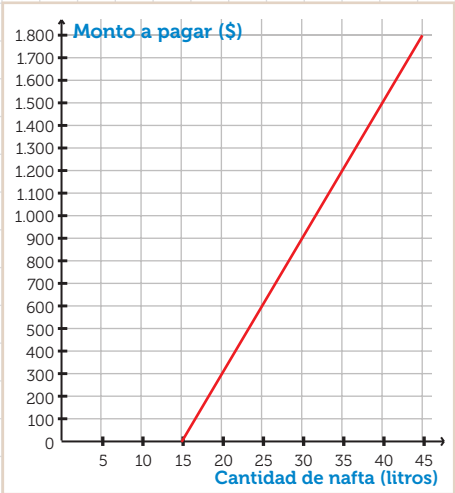
Para hacer en la carpeta

a) ¿Cuánto tiempo estuvo Olivia fuera de su casa?
b) ¿A qué distancia de la casa está la oficina del correo? ¿Cuánto tiempo tardó en llegar?
c) ¿Cuánto tiempo estuvo en el correo? ¿Y durante cuánto tiempo caminó?
d) ¿En algún instante Olivia estuvo a 550 metros de la casa?
e) ¿Dónde se encontraba Olivia a los 40 minutos de haber salido?
f) Identifiquen cuáles son las variables representadas en el gráfico. ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?

PARA LEER ENTRE TODOS

Para representar la relación entre dos variables es usual utilizar la expresión $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, que se lee "$f$ de **x** es igual a **y**", lo que indica que **y** es la imagen de **x**. Por ejemplo, $f(5) = 7$ se lee "f de 5 es igual a 7" y significa que el valor 5 de la variable independiente está relacionado con el valor 7 de la variable dependiente. También se puede decir que 7 es la **imagen** de 5 o 5 es la **preimagen** de 7.

De a dos **3** Un automovilista entra en una estación de servicio a cargar combustible. En su tanque, que tiene una capacidad máxima de 45 litros, lleva 15 litros de nafta. En esa estación el precio del litro de nafta es de $60. A continuación se representa la relación entre el monto que deberá pagar (en pesos) dependiendo de la cantidad de nafta que haya en el tanque (en litros).



a) Completen la tabla.

Cantidad de nafta en el tanque (litros)	15	20	25	30	35	40	45
Monto a pagar ($)							

El problema 3 a) puede resolverse sin la utilización de una fórmula. Los estudiantes podrían obtener los valores directamente del gráfico o hacer cálculos con los datos del enunciado. El docente podrá retomar y poner en relación estos dos tipos de resoluciones, y destacar que por medio de los cálculos se obtienen los mismos valores que se pueden identificar en el gráfico.

b) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representan un monto a pagar en función de los litros de nafta que hay en el tanque?

$f(25) = 600$ $f(600) = 25$ $f(15) = 0$ $f(1.800) = 45$

c) Indiquen con cuál o cuáles de las oraciones se corresponde cada expresión.

- Si el automovilista llena el tanque, deberá pagar un monto de $1.800.
- Si el automovilista paga un monto de $900, entonces en el tanque hay 30 litros.
- Si el automovilista paga un monto de $30, entonces en el tanque hay 900 litros.
- Si el automovilista paga un monto de $1.800, entonces en el tanque hay 45 litros.

$f(45) = 1.800$

$f(30) = 900$

Con relación al problema colectivo final, luego de establecer un modo de obtener el valor de la variable dependiente que le corresponde a un valor de la variable independiente, el docente podrá revisar también con los estudiantes el caso inverso: de qué manera se puede obtener el valor o los valores de la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente.

PENSAR MANERAS DE REPRESENTAR RELACIONES ENTRE TODOS

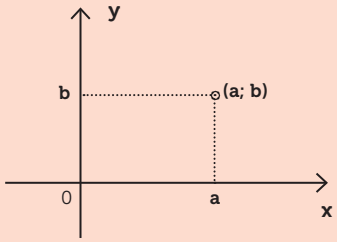
- Analizando un gráfico, ¿de qué manera se puede obtener el valor de la variable dependiente que le corresponde a un valor de la variable independiente?
- ¿Cómo se pueden escribir estas relaciones utilizando la expresión $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$?
  - Al valor 4 de la variable independiente le corresponde el valor 7 de la variable dependiente.
  - Al valor −3 de la variable dependiente le corresponde el valor 9 de la variable independiente.

Para el trabajo con los problemas de estas páginas será importante que el docente acepte provisoriamente como válidas las estrategias empíricas. Si bien la observación no es suficiente para asegurar que un determinado par ordenado representa un punto que pertenece al gráfico de una función, se deja esa discusión para más adelante tanto en este capítulo como en otros.

Representaciones gráficas II

PARA LEER ENTRE TODOS

En un **sistema de coordenadas**, cada punto está asociado a un par de valores. Para indicar este par, los valores se ponen entre paréntesis, y separados por un punto y coma. El primer valor siempre corresponde a la variable que se ha representado en el eje horizontal y el segundo, a la representada en el eje vertical. Por eso, el par de valores se llama **par ordenado**.

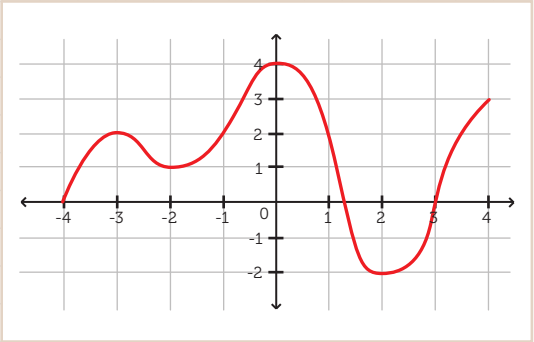


A partir de algunos problemas de estas páginas puede ser necesario discutir el significado de la expresión "pertenecer al gráfico".

De a dos **1** Para cada uno de los siguientes pares ordenados, indiquen si podría representar o no un punto que pertenece al gráfico. En los casos en que no, modifiquen alguna de las coordenadas para que sí lo haga.

(−4; 0) (2; 3) (4; 0)

(0; 4) (3; 4) (−3; 2)



De a dos **2** La siguiente tabla representa la relación entre la longitud de la base de un rectángulo (medida en cm) y su área (medida en cm²). Todos los rectángulos tienen una altura de 5 cm.

Longitud de la base (en cm)	1	2	3	3,5	5	7	10
Área del rectángulo (en cm²)							

a) Completen la tabla.

Al momento de resolver el problema 2 b), puede ser importante tener en cuenta que se trata de la primera situación en la que los estudiantes se enfrentan con la tarea de producir un gráfico cartesiano.

Para hacer en la carpeta

b) Realicen un gráfico que represente el área del rectángulo en función de la longitud de la base.

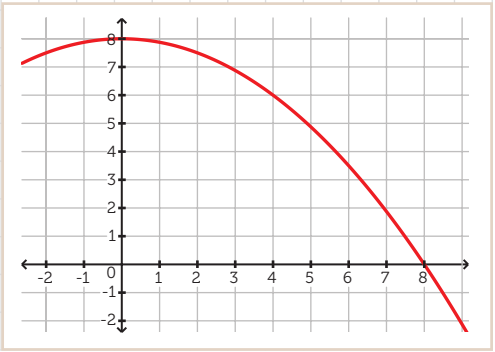
Si bien la continuidad de los gráficos es un tema que se abordará específicamente en las páginas siguientes, puede resultar interesante poner en discusión que en este caso tiene sentido unir los puntos con un trazo continuo.

3 Indicá cuáles de los siguientes puntos podrían pertenecer al gráfico y cuáles no.

(0; 8) (−2; 7,5)

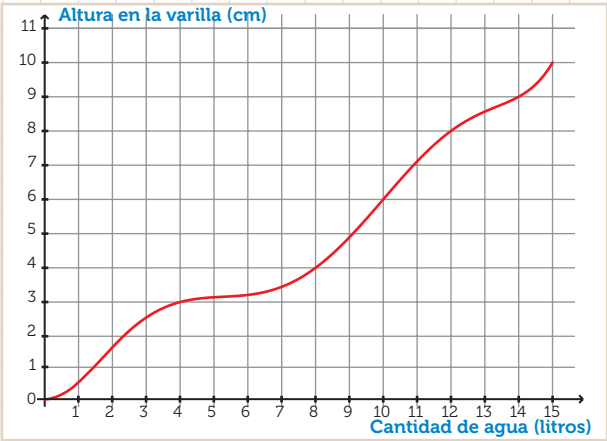
(6; 4) (3; 6,5)

Para responder sobre los pares ordenados (0; 8) y (6; 4) los estudiantes podrán utilizar los valores de los ejes y la cuadrícula que están marcados. En el caso de los otros dos puntos, en cambio, deberán estimar los valores de la ordenada poniendo en juego conocimientos sobre la recta numérica y sobre escalas.



De a dos

4 Un recipiente con una capacidad de 15 litros tiene una varilla para medir la altura que alcanza el agua contenida en su interior. El siguiente gráfico representa la altura que se indica en la varilla en función de la cantidad de agua que hay en el recipiente.



a) El punto (8; 4) pertenece al gráfico. ¿Es cierto que representa que la varilla marca 4 cm cuando el recipiente contiene 8 litros de agua? ¿O es al revés?

b) Escriban las coordenadas de otro punto que pertenezca al gráfico y expliquen qué representa en la situación.

Luego del trabajo con el problema 4 c) el docente podrá destacar para qué casos fue posible hallar valores de manera exacta y para cuáles fue necesario realizar estimaciones. Con este propósito se podrían mostrar distintos valores hallados por los estudiantes para *f*(7) y comparar este caso con los demás, para los cuales se puede hallar valores exactos usando la cuadrícula. La diversidad de respuestas posibles para el ítem d) (cualquier valor entre 12 y 15 litros) podría ser utilizada por el docente como insumo para concluir junto con los estudiantes que una respuesta que incluya todos los valores posibles debe ser expresada como un rango de valores o como un intervalo.

c) En cada caso, si fuera posible, completen con valores que representen relaciones entre la cantidad de agua y la altura de la varilla.

- *f*(0) = ____
- *f*(____) = 6
- *f*(7) = ____
- *f*(20) = ____

d) ¿Para qué cantidad de agua la altura medida sobre la varilla supera los 8 cm?

5 Los siguientes pares ordenados representan distintos valores de la temperatura de una sustancia (medida en °C) en función del tiempo transcurrido desde el momento en que se inició un experimento (medido en minutos).

(5; −7) (7; 1) (3; −5) (4; −7) (0; 2) (6; −1) (2; −6) (1; 6)

a) Completá la tabla.

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatura (°C)								

Para hacer en la carpeta

b) Representá gráficamente la relación entre la temperatura de la sustancia y el tiempo transcurrido.

c) ¿Es posible que en algún momento la sustancia haya alcanzado una temperatura de 0 °C?

En el ítem c) del problema 5 se trata de analizar que, aunque no sea un dato presente en el gráfico, la sustancia necesariamente debió alcanzar 0 °C de temperatura por lo menos en dos ocasiones: en el intervalo de 1 a 2 minutos y en el intervalo de 6 a 7 minutos. Sería importante remarcar que en este contexto los puntos del gráfico deben estar unidos por una curva, aunque no se tenga suficiente información para saber cuál es su forma.

ESCRIBIR CONCLUSIONES ENTRE TODOS

- Expliquen qué procedimiento se puede usar para graficar pares ordenados en un plano.
- Si se dispone del gráfico de una función, ¿cómo se pueden identificar las coordenadas de algunos de sus puntos?

En estas páginas se presentan problemas en los que se estudian algunas características de los gráficos de funciones. El análisis de razones por las que algunas situaciones deben ser representadas con trazos continuos y en otros casos no tiene sentido hacerlo es uno de los aspectos centrales que se intenta abordar.

Diferentes formas de representar funciones

PARA LEER ENTRE TODOS

Cuando entre dos variables **A** y **B** se verifica que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, se dice que la relación entre **A** y **B** es una **función**. La primera es la variable independiente y la otra, la variable dependiente, ya que los valores que toma **B** dependen de los valores que se le asignen a **A**.

De a dos

1 En un almacén hay una oferta de "3 × 2" en sobres de jugo que tienen un precio unitario de $25. Para cobrar de manera más rápida, la cajera del negocio quiere confeccionar una tabla que indique el monto a cobrar según la cantidad de sobres comprados por cada cliente.

a) Completen la tabla.

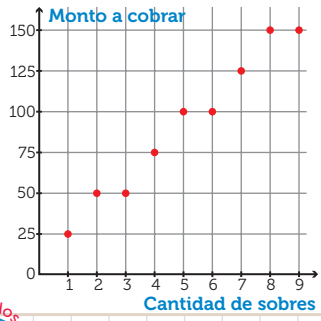
Cantidad de sobres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Monto a cobrar (en $)									

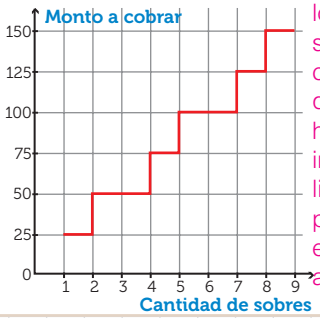
Para hacer en la carpeta

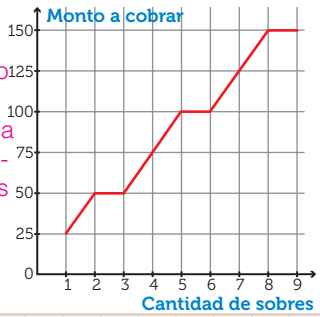
b) ¿Es cierto que la variable independiente es la cantidad de sobres y la variable dependiente el monto a cobrar? ¿O es al revés?

En el ítem b) del problema 1 se podrá retomar el texto "Para leer entre todos" y fundamentar que la variable independiente debe ser la cantidad de sobres de jugo ya que el monto depende de dicha cantidad. Al mismo tiempo se podrá analizar con los alumnos que, si no fuera así, no habría un único valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente.

c) ¿Cuál de estos gráficos les parece que representa mejor la relación entre el monto a cobrar y la cantidad de sobres comprados?







En la resolución del ítem c) del problema 1, a pesar de que el primer gráfico representa mejor la situación, algunos estudiantes podrían elegir los que presentan trazos continuos, dado que son más habituales. Sería interesante analizar las razones por las cuales estos no son adecuados.

De a dos

2 Un día de las vacaciones de invierno Emma viajó en auto a Necochea. Durante las primeras 4 horas manejó a una velocidad constante de 100 km/h, hasta que se detuvo durante una hora a tomar un mate cocido en una confitería. El último tramo de 240 km lo realizó a una velocidad constante de 120 km/h hasta llegar a su destino.

Para hacer en la carpeta

a) Completen la siguiente tabla que representa la distancia recorrida por Emma durante el viaje en función del tiempo transcurrido desde que comenzó.

Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida (kilómetros)						

b) Representen en un gráfico cartesiano la información de la tabla.

c) ¿Se podrían agregar puntos al gráfico? Si creen que sí, agreguen tres. Si creen que no, expliquen por qué. En el ítem d) se trata de analizar que se pueden unir los puntos dado que ambas magnitudes son continuas.

d) ¿Tiene sentido unir los puntos del gráfico? ¿Por qué?

De a dos **3** El correo publicó esta tabla de precios para el envío de paquetes.

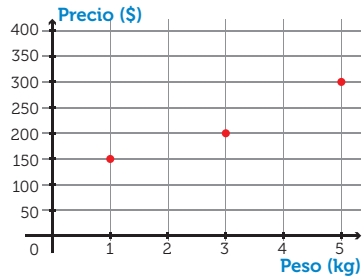
Peso	Precio
Hasta 1 kg	$150
Más de 1 kg y hasta 3 kg	$200
Más de 3 kg y hasta 5 kg	$300

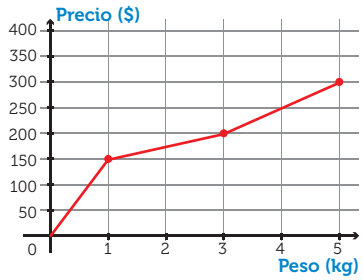
a) ¿Cuánto deberían pagar si quisieran enviar un paquete que pesa 1,50 kg? ¿Y 2 kg? ¿Y 2,50 kg?

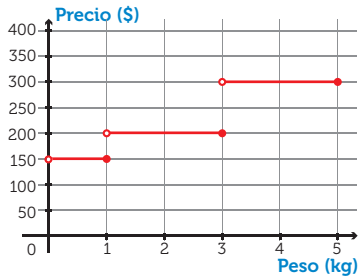
Luego de resolver los ítems a) y b) del problema 3 los alumnos podrían concluir que el peso de un paquete puede ser cualquier valor entre 0 y 5, y esto permite descartar el primer gráfico en el ítem c). También podrían concluir que hay distintos pesos para los que se paga el mismo precio e identificar este hecho con los tramos horizontales del tercer gráfico. En el problema 3 c), si el docente lo considerara oportuno, podría introducir la convención por la cual se utiliza un "punto lleno" para indicar que un punto pertenece a una curva y un "punto vacío" para mostrar que no pertenece a ella.

b) ¿Cuánto deberían pagar si quisieran enviar un paquete que pesa 900 g? ¿Y 1 kg? ¿Y 1,10 kg?

c) ¿Cuál de estos gráficos les parece que representa mejor la relación entre el peso de los paquetes y el precio que se cobra por el envío?

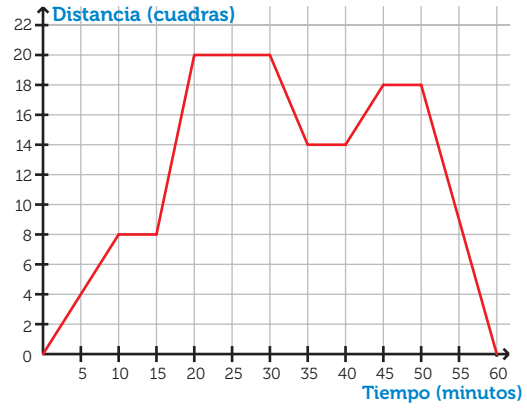






De a dos **4** Para hacer en la carpeta

Gonzalo reparte diarios con una camioneta. El siguiente gráfico muestra la distancia en cuadras a la que se encontraba del kiosco cuando salió a hacer algunas entregas, en función del tiempo.



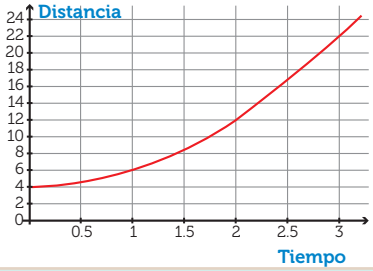
a) ¿Cuántas cuadras recorrió durante los primeros 20 minutos? ¿Y durante los primeros 40? ¿Y durante todo el reparto?

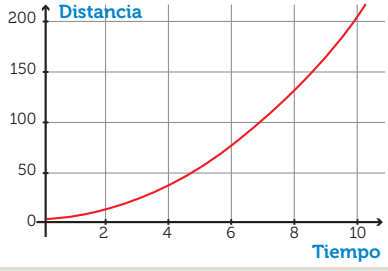
b) Representen en un gráfico la cantidad de cuadras recorridas por Gonzalo en función del tiempo transcurrido desde que salió a hacer las entregas.

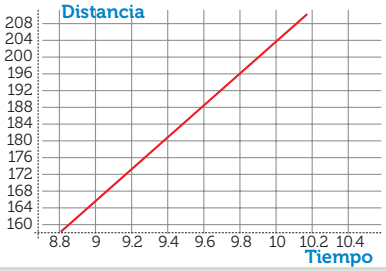
RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Al leer el enunciado del texto "Resolver problemas más difíciles entre todos" el docente podrá recuperar junto con los alumnos la idea de fórmula tratada en capítulos anteriores. Se presentan tres gráficos de la función que pueden obtenerse por medio de programas graficadores cambiando la escala, haciendo zoom y/o moviendo el encuadre. Se intenta establecer que hay distintas maneras de representar el gráfico de una función y que cada una de ellas permite representar e interpretar cuestiones diferentes. Por ejemplo, el segundo gráfico permite determinar que el asteroide se aleja cada vez más rápido de la Tierra, pero no a qué distancia se encuentra exactamente después de 9 días, lo que sí se puede realizar a partir del tercer gráfico. Se intenta estudiar que la pertinencia de una representación particular del gráfico de una función depende de lo que se quiere interpretar o comunicar.

La fórmula **D** = 4 + 2**t**^{2} permite calcular la distancia (en millones de kilómetros) a la que se encuentra de la Tierra un asteroide en función del tiempo que transcurre (medido en días) desde el momento en que empieza a alejarse. ¿Cuál de estos gráficos representa mejor la situación?

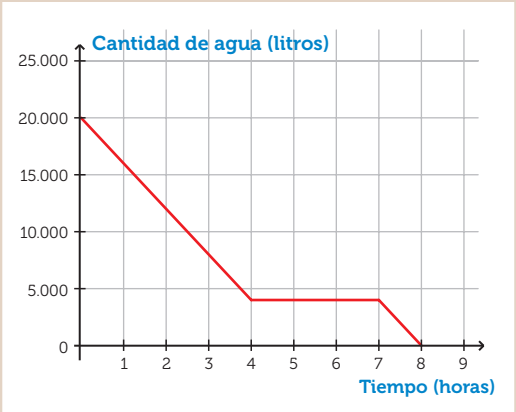






Dominio e imagen de una función

De a dos **1** Una pileta de 25.000 litros de capacidad se vacía por medio de una bomba que opera a un ritmo constante. El siguiente gráfico representa la cantidad de agua que contiene la pileta en función del tiempo transcurrido desde que comenzó a vaciarse.



a) ¿Es cierto que la pileta no estaba llena cuando comenzó a vaciarse?

b) ¿Cuánto tardó en vaciarse?

c) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente? ¿Y la dependiente?

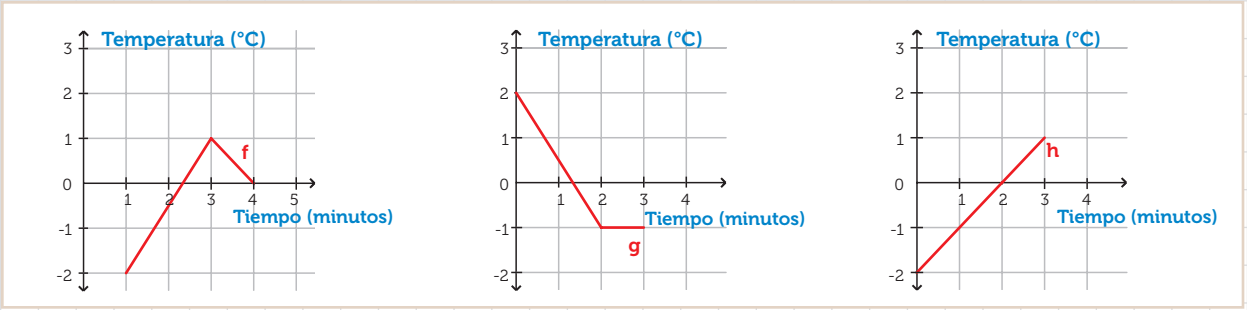
d) ¿Cuánto tiempo estuvo detenida la bomba durante el proceso de vaciado? ¿Cuánto habría tardado en vaciarse si no se hubiera detenido la bomba?

e) ¿Cuántos litros de agua por minuto extrae la bomba?

PARA LEER ENTRE TODOS

Se llama **dominio** de una función *f* al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se lo suele escribir como Dom(*f*) o D(*f*). Se llama **imagen** de una función *f* al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Suele indicarse como Im(*f*) o I(*f*).

De a dos **2** Se realizaron tres experimentos, cada uno con una sustancia distinta. A continuación se muestran los gráficos de las funciones que representan la temperatura de cada una de las sustancias durante los experimentos a partir del momento en que se empieza a medir la temperatura.



a) ¿Es cierto que los tres experimentos tuvieron la misma duración?

b) Para el experimento representado por la función *f*, determinen la temperatura inicial y la temperatura mínima de la sustancia. ¿Es la misma? ¿Y su temperatura final y su temperatura máxima?

El ítem b) del problema 2 tiene la intención de poner en debate, que si bien los extremos del dominio de una función coinciden con los valores inicial y final de la variable independiente, esto

c) Hallen el dominio y la imagen de cada una de las funciones.

mismo no sucede con la imagen ya que los valores mínimos y máximos de la variable dependiente no siempre coinciden con sus valores inicial y final. En el ítem c), con el objetivo de expresar el dominio y la imagen de cada una de las funciones, se puede utilizar la escritura de intervalos a partir de la lectura del apartado "Para leer entre todos".

PARA LEER ENTRE TODOS

La escritura [**a**; **b**] hace referencia a todos los números que se encuentran entre **a** y **b**, considerando también los números **a** y **b**. Se lo llama **intervalo cerrado**.

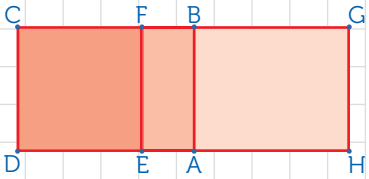
Entre todos **3**

Para resolver

Para resolver

GeoGebra

En la siguiente figura, DEFC es un cuadrado de 3 cm de lado. DHGC es un rectángulo de 24 cm² de área. Sobre el segmento EH se marca el punto A y se construye el rectángulo ABCD.



a) Completen la tabla que representa el área del rectángulo ABCD en función de la longitud del segmento EA.

Longitud del segmento EA (en cm)	0	1	2	2,5		4	
Área del rectángulo ABCD (en cm²)	9				18		24

Para hacer en la carpeta

b) Escriban una fórmula que les permita calcular el área del rectángulo ABCD para una longitud **x** cualquiera del segmento EA.

Una vez que hayan terminado todos los ítems del problema 3, los estudiantes podrían introducir la fórmula producida en el ítem b) en GeoGebra y utilizar el gráfico para comprobar sus resoluciones. Será interesante debatir con los alumnos que el programa no tiene en cuenta la restricción del dominio definida por el contexto.

c) Realicen un gráfico de la función.

d) Hallen el dominio y la imagen de la función.

En el problema 4 se espera que los estudiantes respondan el ítem a) hallando el valor de la variable para el cual el resultado del cálculo es 0. Podrían hacerlo por medio de exploraciones, probando distintos valores para la variable y/o analizando la estructura del cálculo. De esta manera podrán determinar también que el resultado del cálculo (la altura del objeto) es siempre menor o igual que 125. Durante la resolución o al finalizar el problema, se les puede sugerir a los alumnos que introduzcan la fórmula en GeoGebra y usen el gráfico para resolver o para comprobar sus resoluciones.

De a dos **4**

Para resolver

Para resolver

GeoGebra

Un objeto cae desde cierta altura. La fórmula $f(\mathbf{x}) = 125 - 5\mathbf{x}^2$ permite calcular de manera aproximada la altura del objeto (medida en metros) en función del tiempo que pasó desde que comenzó a caer (medido en segundos).

a) ¿Cuánto tarda en caer al piso?

b) ¿Está en algún momento a 80 metros de altura? ¿Y a 130 metros?

c) Hallen el dominio y la imagen de la función.

PARA LEER ENTRE TODOS

Generalmente, para escribir la **fórmula de una relación** entre dos variables se utiliza la expresión $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Por ejemplo, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 10$ es la fórmula de una relación en la cual para obtener el valor de **y**, a cada valor de **x** se le suma 10. Se escribe $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ para destacar que el valor de **y** está en función del valor que tome **x**. Es decir que **x** es la variable independiente e $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ es la variable dependiente.

ANALIZAR CONCLUSIONES ENTRE TODOS

En la sección final colectiva se propone un problema en el que se revisan conclusiones a las que se pudo haber arribado durante estas páginas. La afirmación del primer ítem se puede analizar retomando el primer apartado “Para leer entre todos” de la página 72.

Indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El dominio de una función está formado por valores de la variable dependiente.
- El dominio y la imagen de una función siempre contienen infinitos valores.
- Para determinar el dominio de una función es necesario identificar los valores inicial y final de la variable independiente.

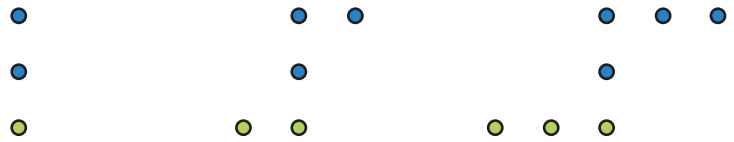
Relaciones entre variables

En estas páginas se estudiarán distintas maneras de definir relaciones entre variables. A su vez, se comienzan a analizar los gráficos de las funciones desligándolos de la pura observación, a partir de la idea de que para que un punto pertenezca al gráfico de una función, sus coordenadas deben verificar una relación.

De a dos **1** Para resolver

Cada dibujo de la siguiente secuencia de figuras está formado por puntos verdes y por puntos azules. En cada caso se agregan puntos para pasar al siguiente dibujo: un punto azul a la derecha en la fila de arriba y un punto verde a la izquierda en la fila de abajo.

Figura 1 Figura 2 Figura 3



En el problema 1 se retoma el trabajo de producción de fórmulas realizado en el primer capítulo de este libro.

a) Completen la tabla de valores, que contiene información sobre la relación entre la cantidad **V** de puntos verdes y la cantidad **T** total de puntos que tiene la figura.

V	1	2	3	4	5	6	7	10	37
T									

Para hacer en la carpeta

b) Escriban una fórmula que les permita calcular el total de puntos de la figura en función de la cantidad de puntos verdes.

c) ¿Es cierto que el punto (2; 5) pertenece al gráfico cartesiano que representa esta relación? ¿Y el punto (100; 201)?

d) ¿Existe algún valor de **V** para el que **T** = 258? ¿Y para el que **T** = 1.975?

De a dos **2**

Se sabe que, para todos los puntos que forman el gráfico de una función *f*, el valor de la segunda coordenada **y** es el doble del valor de la primera coordenada **x**.

a) Considerando que Dom(*f*) = [−1; 3], completen la tabla con algunos pares de valores que pertenezcan al gráfico.

x							
y							

Para hacer en la carpeta

b) Escriban una fórmula para la función *f*.

c) Construyan un gráfico de *f*.

d) Hallen Im(*f*).

La tabla del ítem a) del problema 2 tiene más de 5 columnas con la intención de que los estudiantes deban considerar valores no enteros de la variable x. El trabajo con el ítem b) se podrá acompañar con el texto "Para leer entre todos" de la página 73. En la segunda pregunta del ítem e) los alumnos podrán encontrar el valor 3,7, cuyo doble es 7,4. Sin embargo, de ser necesario, el docente podrá hacer notar que 3,7 no pertenece al dominio de la función.

e) ¿Existe algún valor de **x** que verifique que *f*(**x**) = 5,2? ¿Y que verifique que *f*(**x**) = 7,4?

De a dos

3 Las coordenadas de los puntos (**x**; **y**) del gráfico de una función se relacionan mediante la fórmula $y = \frac{1}{2}x$.

En el problema 3 los estudiantes podrían interpretar la multiplicación por 1/2 de la fórmula como la mitad del valor de la coordenada x, y entonces responder el ítem b) diciendo que el valor de la coordenada y es la mitad del valor de la coordenada x correspondiente y que, de manera recíproca, el valor de la coordena-

a) Completen las coordenadas de los siguientes puntos que pertenecen al gráfico de la función.

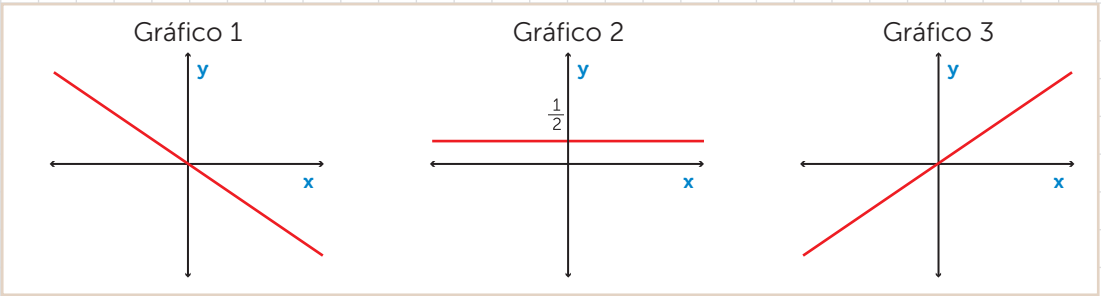
(−2; ____) (____ ; 3) (____ ; 0) (____ ; $\frac{1}{4}$) (7 ; ____) (____ ; 321)

Para hacer en la carpeta

b) Expliquen de qué manera se puede calcular el valor de una de las coordenadas de los puntos del gráfico conociendo el valor de la otra.

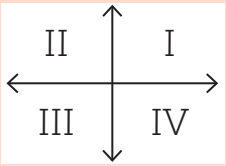
da x es el doble del valor de la coordenada y correspondiente. El docente podría hacer mención a que en un caso se está hallando la imagen de un valor del dominio y, en el otro, una preimagen. En el ítem c) se trata de que los alumnos analicen el sistema de ejes cartesianos de manera más general, motivo por el cual no se proponen escalas en los ejes.

c) Indiquen cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la función.



PARA LEER ENTRE TODOS

Al trazar los ejes de un plano cartesiano, este queda dividido en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.



El **primer cuadrante** o cuadrante I contiene a todos los puntos cuyas dos coordenadas son positivas. El **segundo cuadrante** o cuadrante II contiene a todos los puntos cuya primera coordenada es negativa y la segunda, positiva. El **tercer cuadrante** o cuadrante III contiene a todos los puntos cuyas dos coordenadas son negativas. El **cuarto cuadrante** o cuadrante IV contiene a todos los puntos cuya primera coordenada es positiva y la segunda, negativa.

4 Se sabe que los valores de una variable **y** resultan de restarle 10 a los valores de otra variable **x**.

Para hacer en la carpeta

a) Escribí algunos pares ordenados que verifiquen esta relación funcional.

b) Escribí una fórmula que represente esta relación.

c) En cada caso, si fuera posible, escribí las coordenadas de un punto que verifique esta relación funcional y que:

- se ubique sobre el eje y;
- se ubique en el segundo cuadrante;
- se ubique en el tercer cuadrante.

BUSCAR PUNTOS QUE CUMPLEN CONDICIONES ENTRE TODOS

Se sabe que las coordenadas de los puntos (**x**; **y**) se relacionan mediante la fórmula **x** · **y** = 7.

- ¿Es cierto que todos los puntos (**x**; **y**) se ubican en el primer cuadrante?
- Encuentren las coordenadas de 10 puntos que cumplen con la relación.

En la sección colectiva se trata de que los estudiantes reconozcan que es posible utilizar valores negativos y/o racionales para x e y. Es por este motivo que se pide esa cantidad de puntos.

Puntos que verifican condiciones.

En estas páginas se estudiarán distintas cuestiones referidas a la relación entre la fórmula y el gráfico de una función. Por ejemplo, se pretende concluir que un punto pertenece al gráfico de una función si verifica su fórmula, más allá de su relación con el contexto del problema. Se propone el uso de GeoGebra como entorno y soporte para estudiar estas relaciones.

Funciones: fórmulas y gráficos

1 Para transportar muebles, una compañía de fletes cobra una tarifa base de $200, más $50 por kilómetro recorrido.

Para comprobar

GeoGebra

a) Completá la tabla con algunos importes que podría cobrar la compañía en función de la distancia recorrida al hacer un viaje.

Distancia (km)					
Importe ($)					

b) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas podrían representar la situación? Considerá que se llama **x** a la distancia recorrida en kilómetros y $f(\mathbf{x})$ al precio que se paga.

$f(\mathbf{x}) = 200 - 50\,\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 200 + 50\,\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 50\,\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 50\,\mathbf{x} + 200$

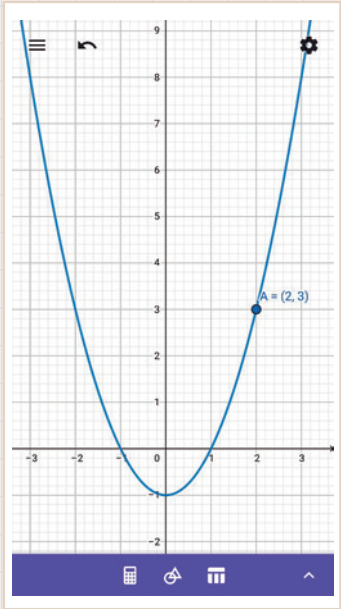
Para hacer en la carpeta

c) Representá gráficamente la función.

En el problema 2 a), al usar el GeoGebra será necesario ir modificando la escala para poder observar los puntos que se proponen.

De a dos

2 Pedro ingresó en la barra de entrada de GeoGebra la fórmula $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 1$. Luego marcó un punto A sobre el gráfico y lo configuró para ver sus coordenadas, como se muestra en la imagen.



GeoGebra

Para resolver

a) ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados puede obtener Pedro moviendo el punto sobre el gráfico?

(1; 0) | (2; 4) | (−2; 3) | (4; 15) | (147; 21.608)

b) Marquen el punto $(\frac{1}{5}; -1)$ en la imagen de la pantalla de GeoGebra. ¿Pertenece ese punto al gráfico de f?

En el problema 2 b) los alumnos marcarán un punto que seguramente "tocará" la curva que representa el gráfico, aunque el punto no pertenezca a ella debido a que no verifica la fórmula de la función. A raíz de este hecho se podrá generar una discusión sobre las limitaciones de la observación y la necesidad del uso de la fórmula. Utilizando GeoGebra podrían ingresar las coordenadas del punto que, en una primera instancia, "tocaría" la curva. Luego, reencuadrando la pantalla con el zoom, los estudiantes podrían observar que el punto no pertenece al gráfico. Si utilizan GeoGebra, deberán tener en cuenta que al ingresar el par ordenado se deben separar las coordenadas con una coma y no con un punto y coma.

c) Hallen 3 puntos más que pertenezcan al gráfico de f.

En el problema 2 c) los alumnos podrán hallar las coordenadas de los puntos utilizando la fórmula de f. También podría suceder que las obtuvieran a partir del gráfico, identificando puntos de la curva en el dibujo o moviendo el punto A en GeoGebra. De ser así, esta podría ser nuevamente una instancia propicia para discutir las limitaciones de la observación y utilizar la fórmula para corroborar si los puntos hallados de manera gráfica pertenecen o no al gráfico de la función. Por ejemplo, analizar qué ocurre con el par ordenado (3,02; 8,09).

3 Manuel es atleta olímpico y se dedica a practicar saltos ornamentales en la pileta desde un trampolín. La fórmula $f(\mathbf{x}) = 9 - (2\mathbf{x} - 1)^2$ describe la altura a la que se encontraba Manuel (medida en metros) en función del tiempo (medido en segundos) durante un salto que realizó en un torneo.

Para resolver

Para resolver

a) Completá la tabla con las alturas correspondientes a los diferentes tiempos.

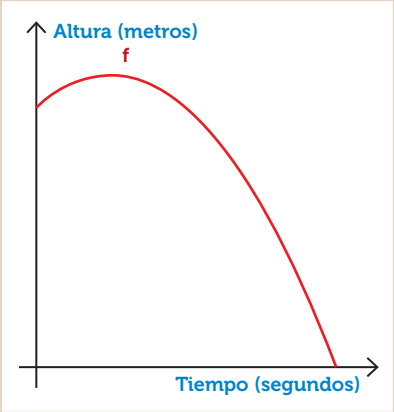
x	0	0,5	1	1,5	2
$f(\mathbf{x})$					

La respuesta del problema 3 b) se puede fundamentar a partir de analizar la fórmula de la función. Se espera que los estudiantes puedan identificar que para cualquier valor de la variable x, el término $(2x - 1)^2$ es un valor positivo o cero, ya que es el resultado de elevar un número al cuadrado. Luego, los resultados del cálculo se obtienen restando ese valor (que es positivo o cero) al número 9, por lo que los valores de la altura son siempre menores o iguales que 9. En el problema 3 c) se presenta un gráfico sin valores ni referencias en los ejes con la intención de que sean los estudiantes quienes deban completarlos a partir del contexto del problema y de los valores de las variables obtenidos en el ítem a).

b) ¿Alcanzó una altura mayor a 9 metros?

c) Sabiendo que este es el gráfico de la función, marcá los puntos que representan aproximadamente los valores obtenidos en el ítem **a)**.

d) ¿A qué altura del piso estaba el trampolín?



4 **a)** Para cada una de las fórmulas de funciones, indicá cuál es el gráfico que la representa y explicá cómo hiciste para darte cuenta.

Para hacer en la carpeta

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3$

$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$

Gráfico 1

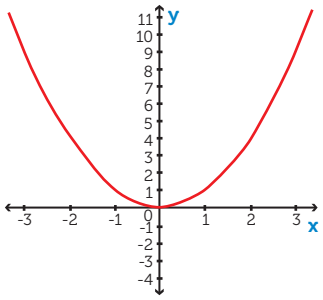
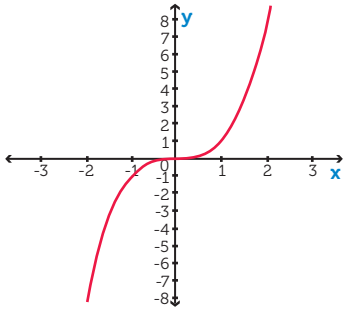


Gráfico 2



Para resolver el problema 4 a) los estudiantes podrían observar características generales de los gráficos y vincular, por ejemplo, el gráfico 1 con la función *g* analizando que todos los valores de su imagen son positivos o cero. También podrían apoyarse en algunos valores específicos y comprobar que los pares ordenados que se obtienen a partir del gráfico son los mismos que se obtienen utilizando la fórmula. Por ejemplo, el punto (–2; –8) en el gráfico 2 y la función *f*. Los alumnos podrían utilizar el programa GeoGebra para comprobar la correspondencia. Seguramente el docente deberá aclarar el significado de las expresiones del problema 4 b). Ambos casos admiten infinitas soluciones, por lo que es esperable que los estudiantes produzcan diversas respuestas. El profesor podría ponerlas en relación y favorecer la caracterización y la escritura del conjunto de todos los números que cumplan con la condición, en cada caso.

b) En cada caso, hallá dos valores de **x** que verifiquen la desigualdad.

- $f(\mathbf{x}) \geq 8$
- $g(\mathbf{x}) \leq 4$

PENSAR NUEVAS PREGUNTAS ENTRE TODOS

Al ingresar la fórmula $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 1$ en GeoGebra, en la pantalla se muestra el gráfico de la función.

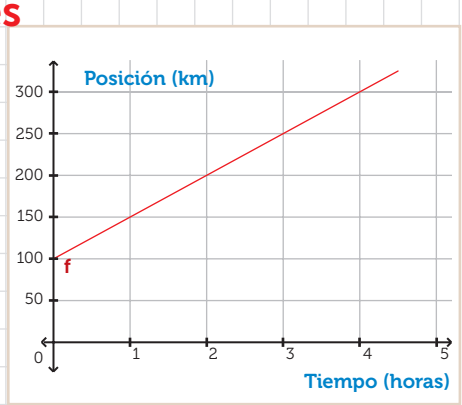
- ¿Es cierto que si luego se introduce el par ordenado (5; 26) se muestra un punto que pertenece al gráfico de la función?
- ¿Qué punto se muestra si se introduce el par ordenado (5; *f*(5))? ¿Y si se ingresa el par (6; *f*(6))? ¿Pertenecen estos puntos al gráfico de la función?
- ¿Qué habría sucedido con esos mismos puntos si la fórmula de la función fuese $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 3$?

Buscar puntos que cumplen condiciones

De a dos

1 La fórmula $f(\mathbf{x}) = 50\mathbf{x} + 100$ permite calcular la posición de un camión sobre una ruta desde que partió de una ciudad transportando una carga. El gráfico corresponde a la función f definida por dicha fórmula, donde **x** representa la cantidad de horas que transcurrieron y $f(\mathbf{x})$ la posición del camión sobre la ruta.

Para hacer en la carpeta



a) Matías dice que para responder en qué momento el camión se encuentra en el kilómetro 275 se puede buscar el tiempo **x** para el cual se verifica la igualdad $50\mathbf{x} + 100 = 275$. ¿Están de acuerdo?

El problema 1 busca que los alumnos identifiquen que es posible recurrir al gráfico de una función como un medio para resolver una ecuación. Pueden surgir dos maneras de resolverla: a partir de la fórmula y a partir del gráfico.

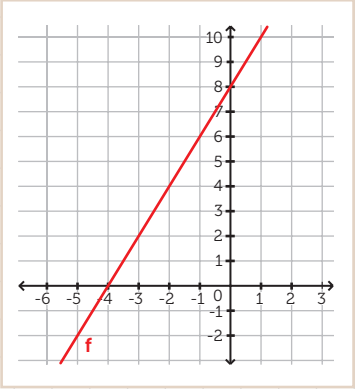
b) Encuentren dos maneras de hallar el valor de **x**.

El docente podría poner en relación ambos abordajes, y recuperar discusiones de las páginas anteriores para destacar la necesidad de emplear la fórmula cuando se resuelve de manera "visual" para verificar la solución hallada.

PARA LEER ENTRE TODOS

Cuando la fórmula de una función se iguala a un valor específico **k**, se forma una **ecuación de una variable**. **Resolver una ecuación** de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$, en la que **k** es un número cualquiera, significa encontrar todos los valores de **x** para los cuales se verifica la igualdad. Por ejemplo, si la ecuación es $2\mathbf{x} + 8 = 14$, el valor $\mathbf{x} = 3$ es solución de la ecuación, porque $2 \cdot 3 + 8 = 14$; en cambio, $\mathbf{x} = 7$ no es solución de la ecuación, porque $2 \cdot 7 + 8 \neq 14$.

2 El gráfico representa la función $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + 8$.



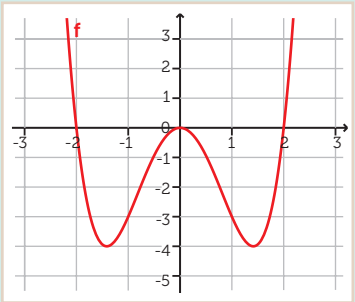
a) Marcá sobre el gráfico el punto que sirve para hallar la solución de la ecuación $2\mathbf{x} + 8 = 0$.

b) Marcá sobre el gráfico el punto que sirve para hallar la solución de la ecuación $f(\mathbf{x}) = 1$.

c) Encontrá el valor de **x** que es solución de cada una de las ecuaciones anteriores.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

El gráfico representa la función $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 (\mathbf{x} - 2) (\mathbf{x} + 2)$.



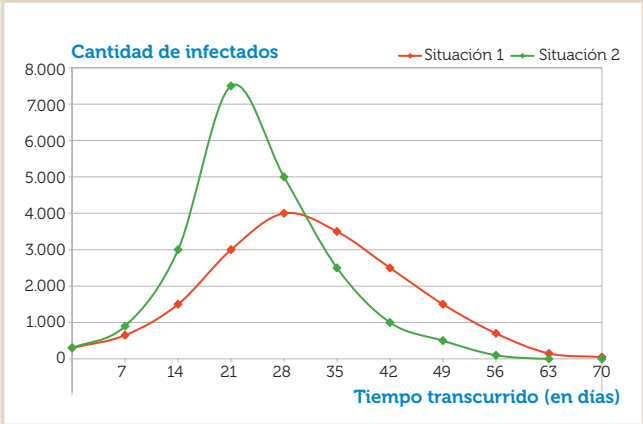
- ¿Cómo se podría hacer para resolver la ecuación $\mathbf{x}^2 (\mathbf{x} - 2) (\mathbf{x} + 2) = 0$?
- ¿Es posible hallar dos valores de **x** que sean solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 (\mathbf{x} - 2) (\mathbf{x} + 2) = -3$? ¿Son los únicos?
- ¿Es cierto que la ecuación $f(\mathbf{x}) = 2$ tiene dos soluciones? ¿Y la ecuación $f(\mathbf{x}) = -5$?
- Propongan distintos valores de **k** para los cuales la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$ tenga 4 soluciones.

Se espera que, para resolver el problema colectivo final, los alumnos se apoyen en el gráfico y en los pares ordenados que se pueden identificar.

En los problemas de esta página se presentan gráficos estadísticos elaborados con planilla de cálculo. Será necesario aclarar que en este caso los puntos aparecen unidos con la finalidad de analizar las variaciones.

Representaciones gráficas III

1 En el gráfico se muestran dos curvas que representan el número de infectados con una enfermedad que podría haber en una ciudad en función del tiempo transcurrido (en días) desde que se diagnosticaron los primeros casos.



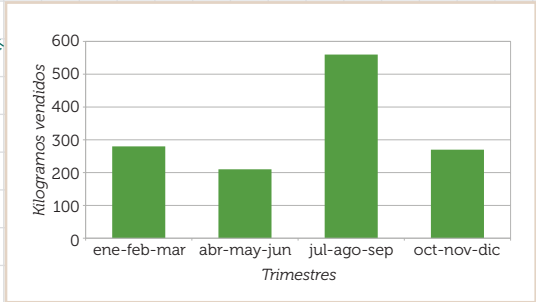
a) ¿En cuál de las dos situaciones crece más rápido el número de contagios?

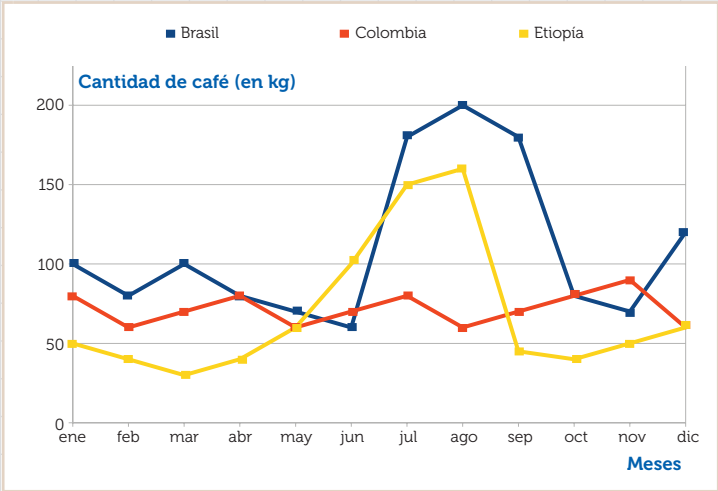
b) Si el sistema de salud de la ciudad puede atender hasta 5.000 casos simultáneamente, ¿podría atender a todos los infectados en cualquiera de las situaciones? En el caso de que no pudiera, ¿aproximadamente cuándo colapsaría el sistema de salud?

c) ¿Cuál debería ser la mínima capacidad máxima de atención del sistema de salud para que el gobierno no tuviera que tomar medidas para aplanar la curva en la situación 2?

2 En una cafetería se vende café molido de tres orígenes: Brasil, Colombia y Etiopía. Los gráficos muestran la venta, en kilogramos, a lo largo de un año.

a) ¿A la venta de café de qué origen corresponde el gráfico de barras?





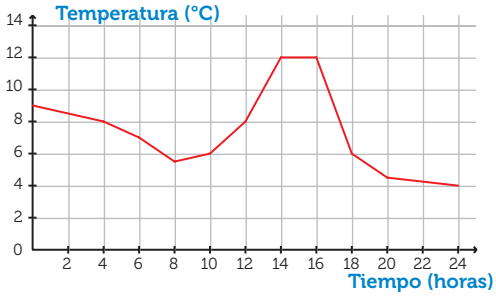
b) Realizá un gráfico de barras con los datos de la tabla, que representa las ventas por trimestre de la variedad de café de Etiopía de otro año.

Mes	ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic
Cantidad de café (en kg)	15	12	10	13	20	35	50	55	15	12	17	21

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1 El siguiente gráfico muestra la temperatura de un día de agosto en la ciudad de Buenos Aires en función del tiempo.



a) ¿Qué es necesario tener en cuenta para completar una tabla como la siguiente con algunos valores relacionados que se muestran en el gráfico?

Tiempo (horas)							
Temperatura (°C)							

b) ¿Cuáles son todos los valores con los que se podría completar la primera fila?

c) ¿Cuáles son los puntos del gráfico que sirven para determinar el dominio y la imagen de la función?

d) Expliquen por qué se puede asegurar que $f(22) < 4{,}5$.

2 a) Vuelvan a mirar los problemas 1, 2 y 3 de las páginas 70 y 71. ¿Qué aspectos de los problemas tuvieron en cuenta para decidir si tenía sentido unir los puntos en los gráficos?

b) Vuelvan a mirar los problemas de la página 78 y expliquen cómo se pueden usar los gráficos de funciones para resolver ecuaciones.

c) Vuelvan a resolver el problema 2 de la página 74 considerando $\text{Dom}(f) = [-2; 2]$. ¿Es cierto que cambia la imagen de la función? Elijan un valor para la variable **k** de manera que no exista ningún valor de **x** que verifique que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$.

3 Busquen en el libro y en sus carpetas anotaciones y resoluciones que los ayuden a analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) En una función, un valor de **x** puede estar relacionado con dos valores de **y**.

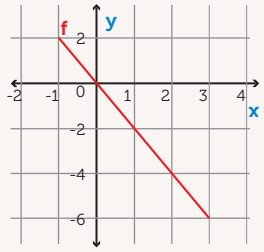
b) En una función, dos valores distintos de **x** pueden estar relacionados con el mismo valor de **y**.

c) A partir de la información que brinda el gráfico de una función se puede determinar si un par ordenado representa uno de sus puntos.

4 Busquen las páginas del libro en las que se hayan resuelto problemas que les sirvan para hacer esta actividad y discutan maneras de resolverla.

Completen los cuadros que relacionan distintas representaciones y elementos de una función.

Gráfico



Tabla

x	-1	0	1		
y				-6	$\frac{1}{2}$

Fórmula

$f(\frac{1}{2}) =$ ____

$f(-\frac{1}{3}) =$ ____

$f($____$) = -4$

Dominio

Imagen

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1 A principios de mes, Julieta tiene en su tarjeta Sube un saldo de $100 que usa para viajar a la escuela. Cada viaje de ida o de vuelta le cuesta $20.

a) Completá la siguiente tabla de manera que registre el saldo de la tarjeta en función de la cantidad de viajes que lleva hechos en el mes y considerando que no hace ninguna recarga.

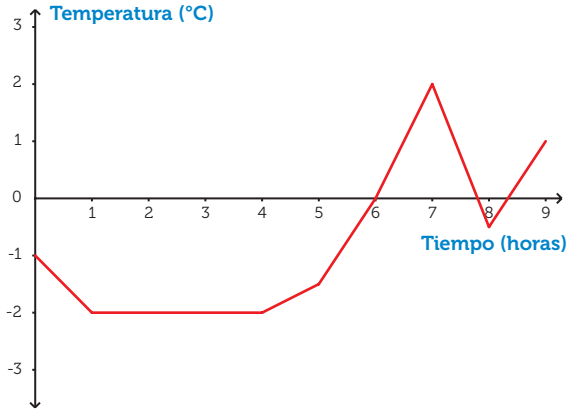
Cantidad de viajes	2	3			8
Saldo de la tarjeta			0	−20	

b) Representá en un gráfico cartesiano la información de la tabla.

c) ¿Se podrían agregar puntos al gráfico? ¿Tiene sentido unir los puntos del gráfico?

d) Escribí una fórmula que te permita calcular el saldo de la tarjeta para una cantidad **x** cualquiera de viajes.

2 El gráfico de la función *f* describe la temperatura ambiental (en °C) desde las 0 hasta las 9 horas de un día de invierno en la zona de Bella Vista.



Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- La temperatura aumenta durante las primeras 7 horas.
- $f(\mathbf{x}) = -2$ para cualquier valor de **x** en el intervalo [1; 4].
- En ningún momento la temperatura fue de −0,5 °C.
- La imagen de *f* es [−1; 1].
- La temperatura máxima fue de 2 °C y la mínima, de −2 °C.

3 Se sabe que en todos los puntos que forman el gráfico de una función *f* el valor de la segunda coordenada **y** es el valor de la primera coordenada **x** aumentada en dos unidades.

a) Considerando que Dom(*f*) = [−2; 1], completá la tabla con algunos pares de valores que pertenezcan al gráfico.

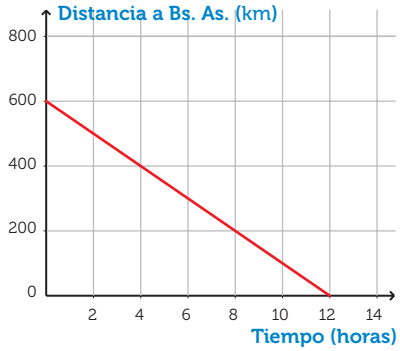
x							
y							

b) Escribí una fórmula para la función *f*.

c) Construí el gráfico de *f*.

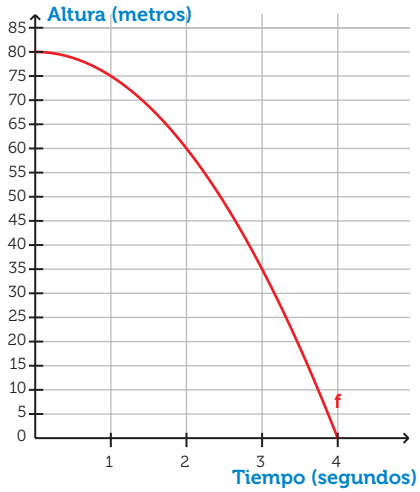
d) Hallá Im(*f*).

4 Un auto va de Quequén a Buenos Aires por la ruta 29 a velocidad constante. El gráfico representa la distancia del automóvil a Buenos Aires (en km) en función del tiempo transcurrido (en horas) desde que salió.



a) ¿Cuánto tarda de Quequén a Buenos Aires?
b) Si se desplazara a una velocidad constante de 60 km/h, ¿cuánto tardaría en llegar? ¿Cómo se modifica el gráfico de la situación en este caso?
c) ¿Cuál es el dominio de la función representada en el gráfico original? ¿Es cierto que cambia para la situación descrita en el punto b)?
d) ¿Cuál es la imagen de la función representada en el gráfico original? ¿Es cierto que cambia para la situación descrita en el punto b)?

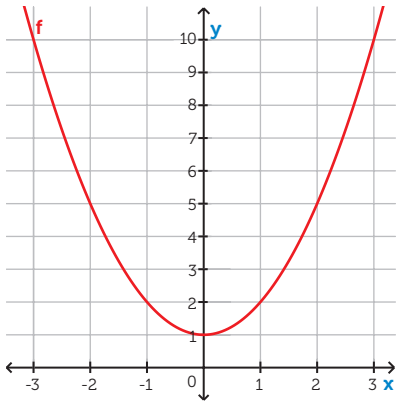
5 La fórmula $f(\mathbf{x}) = 80 - 5\mathbf{x}^2$ representa la altura aproximada (en metros) a la que se encuentra un objeto que se deja caer desde una altura determinada, en función del tiempo (en segundos) que transcurre desde que se lo suelta.
Se muestra el gráfico de la función.



a) ¿Desde qué altura se dejó caer el objeto?
b) ¿Cuánto tardó en llegar al piso?
c) Hallá el dominio y la imagen de *f*.
d) Hallá, si fuera posible, valores de **x** que verifiquen las ecuaciones:
- $80 - 5\mathbf{x}^2 = 75$
- $80 - 5\mathbf{x}^2 = 90$

e) ¿Cómo se pueden interpretar las ecuaciones del ítem d) y sus soluciones en el contexto del problema?

6 El gráfico representa la función $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 1$.



a) Marcá sobre el gráfico el punto o los puntos que sirven para hallar la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 1 = 5$ y encontrá el valor o los valores de **x** que son solución de la ecuación.
b) Marcá sobre el gráfico el o los puntos que sirven para hallar todos los valores de **x** que verifican la condición $f(\mathbf{x}) \leq 5$ y expresá cuáles son esos valores.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Victoria decidió comprar lapiceras con tinta lavable en un mercado virtual. Cada lapicera cuesta $70 y el valor del envío a su domicilio es $350.

a) Completá la siguiente tabla de manera que registre el costo total de la compra en función de la cantidad de lapiceras que adquiere Victoria.

L: Cantidad de lapiceras	5	10	20	30	40
C: Costo total (en $)					

b) Graficá la relación representada por la tabla.

c) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas representan mejor la situación?

$\mathbf{C} = 70 \cdot \mathbf{L}$

$\mathbf{C} = 350 + 70 \cdot \mathbf{L}$

$\mathbf{C} = 350 - 70 \cdot \mathbf{L}$

$\mathbf{C} = 70 \cdot \mathbf{L} + 350$

d) Si se hace una compra mayor a $2.000, el mercado bonifica el envío. ¿Cuántas lapiceras deberá comprar Victoria para no pagar el envío?

2 Las coordenadas de los puntos (**x**; **y**) del gráfico de una función se relacionan mediante la fórmula $\mathbf{y} = -\frac{1}{3}\mathbf{x}$.

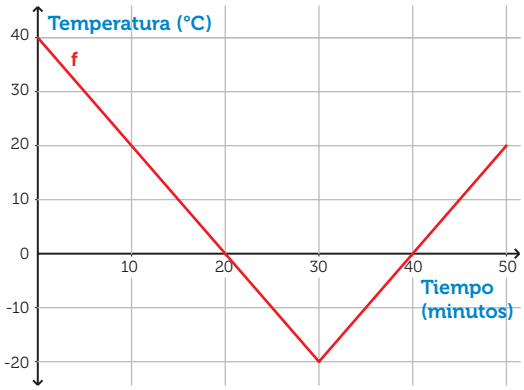
a) Completá las coordenadas de los siguientes puntos que pertenecen al gráfico de la función.

(−3; _____) (6; _____) (_____ ; −1) (_____ ; $\frac{1}{6}$) (_____ ; 100)

b) Explicá de qué manera se puede calcular el valor de una de las coordenadas de los puntos del gráfico en función del valor de la otra.

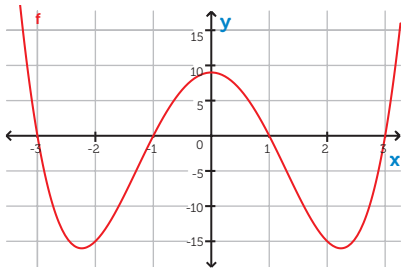
c) ¿Es posible que algún punto del gráfico de la función esté en el primer cuadrante? ¿Y en el tercero?

3 En un experimento se enfría una sustancia durante un período de tiempo y luego se deja que vuelva a subir su temperatura. El siguiente gráfico corresponde a la función *f*, que representa la temperatura de la sustancia (en °C) en función del tiempo, medido en minutos.



a) ¿Es cierto que a los 15 minutos la sustancia está a mayor temperatura que a los 20? ¿Es posible asegurar que $f(10) = f(50)$?
b) ¿En qué período disminuye la temperatura de la sustancia?
c) ¿Cuál es la temperatura máxima y cuál la mínima? ¿En qué momento alcanza cada una?
d) ¿En algún período la temperatura se mantuvo constante?

4 El gráfico representa la función definida por la fórmula $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + 3)(\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} - 1)(\mathbf{x} - 3)$.



a) Resolvé la ecuación
$(\mathbf{x} + 3)(\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} - 1)(\mathbf{x} - 3) = 0$.
b) ¿Es cierto que $f(-2) = f(2)$?
c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(\mathbf{x}) = -15$? ¿Y la ecuación $f(\mathbf{x}) = 10$?

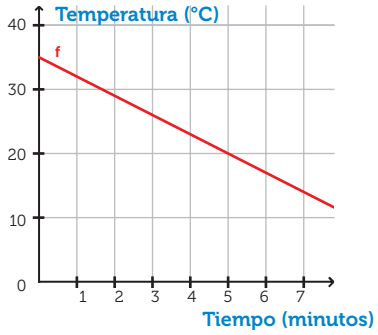
5 Para regar los espacios verdes de una ciudad se utiliza un camión cisterna que tiene una capacidad de 5.000 litros. El camión permite descargar 200 litros de agua por hora.

a) Completá la siguiente tabla.

Tiempo (horas)						
Cantidad de agua que sale (litros)						

b) Graficá la relación representada en la tabla.
c) Escribí una fórmula que te permita representar la relación.
d) ¿Cuál es la máxima cantidad de tiempo que se puede estar regando? ¿Y si el camión descargara 400 litros por hora?

6 El siguiente gráfico corresponde a la función $f(\mathbf{x}) = 35 - 3\mathbf{x}$, que representa la temperatura a la que se encuentra una sustancia en función del tiempo que transcurre desde que comienza un experimento.



a) ¿Se puede asegurar que la temperatura nunca fue de 0 °C?
b) Si el experimento duró 15 minutos, ¿cuál fue la temperatura mínima de la sustancia?

Esta página tiene la intención de recuperar definiciones y propiedades asociadas a los cuadrados y sus diagonales. Su propósito es concluir que las diagonales del cuadrado se cortan en su punto medio, apelando a argumentos apoyados en propiedades de las figuras estudiadas en el capítulo 3 (por ejemplo, aquellas referidas a alturas, triángulos isósceles, etcétera) que excedan la mirada sobre el contexto.

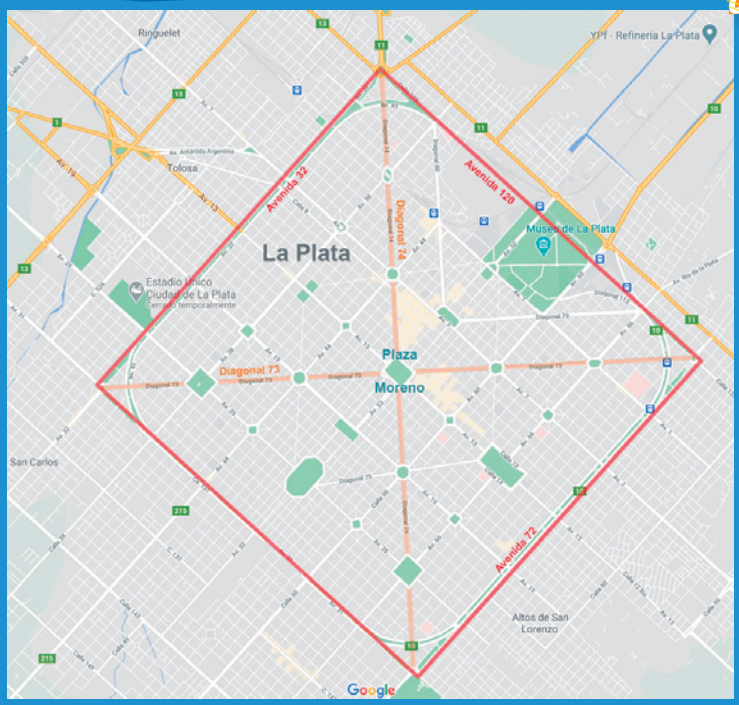
6 GEOMETRÍA II

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

La Plata, conocida como "la ciudad de las diagonales", es la capital de la provincia de Buenos Aires. Fue fundada por Dardo Rocha en 1882 y se convirtió en un modelo de diseño y planificación.

Responde a una organización en forma de cuadrícula, que incluye diagonales. Cada seis cuadras es posible encontrar una plaza, la cual constituye la intersección entre dos avenidas. Algunas de las razones por las que fue construida con este diseño son: lograr un equilibrio entre espacios verdes y urbanos, contar con zonas que posibiliten la socialización y el encuentro, y que el límite de la ciudad sea visible.

Su casco urbano es un cuadrado de 5 km de lado. Las diagonales de dicho cuadrado están sobre los bulevares Diagonal 73 y Diagonal 74, y se intersecan en Plaza Moreno. En este mapa, el casco urbano está indicado en color rojo.



PARA PENSAR ENTRE TODOS

La tarea propuesta en la sección "Para pensar entre todos" puede enriquecerse si el docente propone la utilización de la aplicación Google Maps para recorrer el mapa de La Plata en detalle. A partir de este estudio se pueden

- Si una persona camina por Diagonal 73, desde la intersección entre las avenidas 72 y 120 hasta Plaza Moreno, ¿recorre la misma distancia que otra que se dirige al mismo punto, pero camina por Diagonal 74 desde la intersección entre las avenidas 120 y 32?

- ¿Es cierto que Plaza Moreno está ubicada en el punto medio de las diagonales del cuadrado que forma el casco urbano?

agregar algunas preguntas que sirvan para recuperar nociones como paralelismo, perpendicularidad, definiciones de cuadriláteros, etc.

Las actividades de estas páginas proponen analizar propiedades de paralelogramos apoyándose en la congruencia de triángulos determinados por sus diagonales y las cuestiones abordadas en el capítulo 3. Este trabajo será el punto de partida para estudiar relaciones relativas a ángulos entre paralelas.

Paralelogramos, rectas paralelas y ángulos

Para hacer en la carpeta

1 a) Construí, si fuera posible, un paralelogramo que tenga un ángulo de 30° y otro ángulo de 150°.

La resolución del problema 1 intenta que los alumnos identifiquen la relación entre dos ángulos consecutivos de un paralelogramo: suman 180°. Se trata de apoyar esta idea en que los lados opuestos deben "tener la misma

b) Construí, si fuera posible, un paralelogramo que tenga un ángulo de 40° y otro ángulo de 160°.

Para usar — Para comprobar — GeoGebra

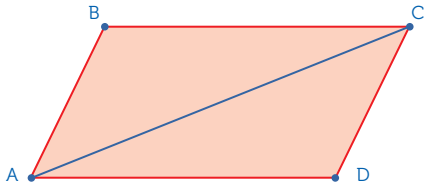
inclinación", los ángulos "correspondientes" (aunque los alumnos no los designen así aún) deben medir lo mismo. Es probable que el docente deba recuperar la definición de paralelogramo, ya que tal vez algunos alumnos no la recuerden.

De a dos

2 ¿Será cierto que en todos los paralelogramos la suma de las medidas de dos ángulos consecutivos es siempre 180°? El análisis conjunto de la propiedad enunciada en el problema 2 intenta generalizar las ideas que pudieron surgir a partir del problema 1.

De a dos

3 En la figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y el segmento AC es una de sus diagonales.



Para comprobar — GeoGebra

a) Encuentren una manera de justificar, sin medir, que los triángulos ABC y CDA son congruentes.

En la parte a) del problema 3, los alumnos podrán apoyarse en que uno de los lados es común a los dos triángulos y que los lados opuestos del paralelogramo son congruentes. La elaboración de esta relación entre lados opuestos paralelos y lados opuestos congruentes podrá sustentarse en una idea inicial un poco más intuitiva; por ejemplo, como los lados BC y AD están entre paralelas, deben tener la misma longitud.

b) ¿Cuáles son los pares de ángulos congruentes entre los triángulos ABC y CDA?

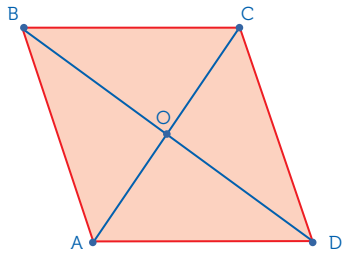
La pregunta del ítem b) del problema 3 apunta a que los alumnos identifiquen no solo la congruencia entre los ángulos B y D sino también la congruencia entre los ángulos CAB y ACD, así como los ángulos BCA y DAC. Podrían pensarse como alternos internos entre los segmentos paralelos (BC y AD) cortados por una transversal (el segmento diagonal AC), aspecto que se retomará posteriormente.

c) ¿Es cierto que, en todos los paralelogramos, los ángulos opuestos son congruentes?

Para resolver el ítem c) del problema 3, los alumnos pueden apelar a las relaciones establecidas en los ítems anteriores para arribar a que los ángulos DAB y BCD son congruentes, o bien trazar la otra diagonal y realizar un razonamiento análogo al hecho en el ítem b). Como la figura no tiene medidas, se puede generalizar la propiedad al resto de los paralelogramos, lo que dotará de sentido a la definición de ángulos alternos internos.

De a dos

4 Los segmentos AC y BD son las diagonales del paralelogramo ABCD. El punto O es la intersección entre ambas diagonales.



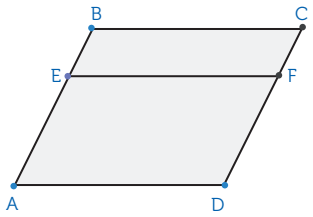
a) Encuentren un modo de explicar que el triángulo BOA es congruente al triángulo DOC y que el triángulo COB es congruente al triángulo AOD.

b) Si el ángulo BOC mide 70°, ¿cuánto miden los ángulos AOD, DOC y BOA?

La intención del problema 4 es que los estudiantes puedan concluir que los ángulos opuestos por el vértice (que se pueden definir a partir de esta actividad) son congruentes y los adyacentes suman 180°, a partir del análisis de la congruencia de los triángulos formados por las dos diagonales del paralelogramo. El docente podrá intervenir con sugerencias respecto de la comparación de triángulos. El ítem b) propone el análisis de un caso particular, con la medida de un ángulo determinada, con la intención de orientar el estudio hacia los ángulos de los triángulos, para poner en juego las relaciones entre ángulos que han sido elaboradas en los problemas anteriores.

De a dos

5 El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Los puntos E y F pertenecen a los lados BA y CD, respectivamente, y forman el segmento EF, paralelo a los lados BC y AD.



a) ¿Cómo se puede justificar, sin medir, que el ángulo DAB es congruente al ángulo FEB?

Para la resolución del problema 5, ítem a), los alumnos podrían apoyarse en las diagonales BF y ED, que determinan cuatro triángulos. El ítem c) permite integrar los ítems a) y b), para el caso particular de un paralelogramo con la medida de un ángulo dada.

b) ¿Hay algún ángulo en el cuadrilátero EBCF que sea congruente al ángulo CDA?

c) Sabiendo que el ángulo CFE mide 115°, calculen la medida de todos los ángulos de la figura.

PARA LEER ENTRE TODOS

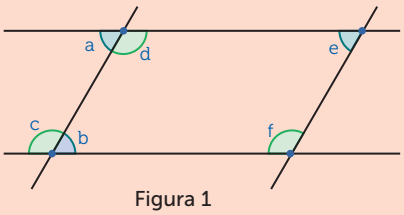


Figura 1

En la figura 1 se representaron dos pares de rectas paralelas.
Los ángulos que se ubican como c y d se denominan **alternos internos entre paralelas** y son congruentes entre sí. Lo mismo ocurre con los ángulos a y b.
Los ángulos que se ubican como c y f se denominan **correspondientes entre paralelas** y son congruentes. Lo mismo ocurre con los ángulos que se ubican como a y e.

Los pares de ángulos que comparten exactamente un lado y cuyas medidas suman 180° se llaman **adyacentes**.
En la figura 2, los ángulos m y n son adyacentes. Lo mismo sucede con n y r, r y s, s y m.
Los pares de ángulos que tienen el mismo vértice y no son adyacentes siempre son congruentes y se llaman **opuestos por el vértice**.
En la figura 2, los ángulos m y r son opuestos por el vértice. Lo mismo ocurre con los ángulos s y n.

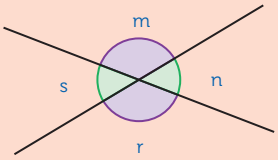
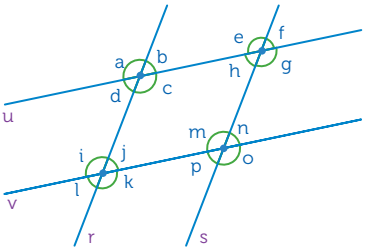


Figura 2

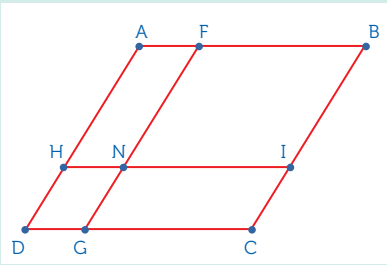
6 En la siguiente figura las rectas u y v son paralelas, al igual que r y s, y $\hat{m}$ = 130°. Averiguá cuánto miden todos los ángulos de la figura, sin efectuar mediciones.



La intención del problema 6 es que los alumnos pongan en juego lo estudiado en los problemas anteriores para resolverlo.

DETERMINAR MEDIDAS DE ÁNGULOS ENTRE TODOS

En la figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, y $\overline{HI}$ y $\overline{FG}$ están sobre rectas paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.



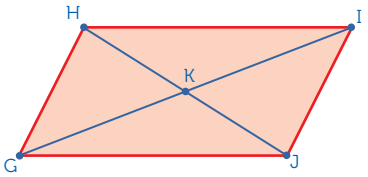
- Sabiendo que el ángulo FNH mide 140°, averigüen la medida del resto de los ángulos de la figura sin medirlos.
- ¿Es cierto que, conociendo la amplitud de cualquiera de los ángulos de la figura, es posible averiguar la amplitud de todos ellos?

En estas páginas se proponen problemas que permiten trabajar en torno a las propiedades de las diagonales de los paralelogramos. Estas podrán ser deducidas a partir del análisis de la congruencia de los triángulos determinados por ellas, del trazado de circunferencias que pasen por todos los vértices de los cuadriláteros estudiados y de las propiedades de ángulos entre paralelas ya analizadas.

Diagonales de paralelogramos

De a dos

1 En el paralelogramo GHIJ se trazaron las diagonales HJ y GI. El punto K es la intersección entre ambas.



Para hacer en la carpeta

a) Encuentren una manera de justificar, sin medir, que los segmentos KI y KG son congruentes. ¿Sucede lo mismo con los segmentos HK y KJ?

b) ¿Es cierto que siempre que se tracen las dos diagonales de un paralelogramo su punto de intersección será el punto medio de ambas?

c) Si el paralelogramo GHIJ fuera un rectángulo, ¿se podría afirmar que sus diagonales son congruentes? Los estudiantes podrán abordar el problema 1 poniendo en juego la congruencia de los triángulos determinados por las diagonales, recuperando lo estudiado en el problema 4 de la página 86. A partir de esta actividad podrán concluir que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio y que, en el caso de que fuera rectángulo, estas son congruentes.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Los rectángulos, los rombos y los cuadrados son **paralelogramos** particulares porque cumplen con la propiedad de tener dos pares de lados paralelos, aunque también con otras.
Los **rectángulos** tienen sus 4 ángulos rectos, los **rombos** sus 4 lados congruentes, y los **cuadrados** tienen sus 4 lados congruentes y sus 4 ángulos rectos.

cuadrado — paralelogramo — rectángulo — rombo

De a dos

2 a) ¿Es posible trazar una circunferencia que pase por los cuatro vértices del rectángulo dibujado? ¿Y del rombo? Si creen que sí, dibújenla; si no, expliquen por qué. Si van a usar GeoGebra, no empleen la herramienta "circunferencia por tres puntos".

Para usar — Para comprobar — GeoGebra

b) ¿Qué características debe tener un paralelogramo para que se pueda dibujar una circunferencia que pase por sus cuatro vértices?

En el problema 2 a), los estudiantes podrán ensayar algunos trazados intentando encontrar los centros y los radios de las circunferencias. Se trata de analizar que, si se trazan las diagonales del rectángulo, el punto de intersección entre ambas será el centro de la circunferencia cuyo radio es la mitad de la diagonal. En el caso del rombo, será necesario debatir con los alumnos que, al no ser congruentes las diagonales, los vértices no equidistan de su punto de intersección. En el ítem b) se espera que los estudiantes concluyan que, para que la circunferencia pueda construirse, tiene que existir un punto (que será el centro de aquella) equidistante de los vértices del paralelogramo. Esta idea permitiría analizar que las diagonales de un paralelogramo no necesariamente son congruentes.

El problema 3 posibilita generalizar algunas propiedades relativas a las diagonales de los paralelogramos y al trazado de una circunferencia que pase por todos sus vértices. Se busca concluir que, siempre que las diagonales de un paralelogramo sean congruentes, será posible encontrar una circunferencia que lo inscriba. Por eso, todos los rectángulos se pueden inscribir en una circunferencia y los paralelogramos que no son rectángulos no se pueden inscribir en ninguna circunferencia.

Entre todos

3 Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Para hacer en la carpeta · GeoGebra · Para usar · Para comprobar

a) Siempre es posible dibujar una circunferencia que pase por los cuatro vértices de un cuadrado.

b) No siempre es posible dibujar una circunferencia que pase por los cuatro vértices de un rectángulo.

c) Si un paralelogramo tiene dos diagonales no congruentes, entonces no es posible dibujar una circunferencia que pase por sus vértices.

4 a) Construí un rectángulo en el que $\overline{NK}$ sea una de sus diagonales.

Para usar · Para comprobar · GeoGebra

En el problema 4 los estudiantes pueden poner en juego la propiedad de que las diagonales de un rectángulo se cortan en sus respectivos puntos medios y son congruentes. Además, que es posible construir infinitos rectángulos a partir de una diagonal dada, dependiendo de la amplitud de los ángulos que forman entre ellas. En particular, en el caso de que dichas diagonales sean perpendiculares se formará un cuadrado.

b) ¿Es posible construir un rectángulo distinto con la misma diagonal?

Entre todos

5 Encuentren una forma de explicar por qué en todos los cuadrados las diagonales son congruentes y perpendiculares.

En el problema 5 los estudiantes podrán analizar que las diagonales del cuadrado determinan cuatro triángulos isósceles congruentes. Esto implica que, en cada triángulo, los ángulos congruentes miden la mitad de un recto. La propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo permitirá deducir que los ángulos "distintos" en los triángulos isósceles son rectos y, por lo tanto, las diagonales son perpendiculares.

6 a) En hoja lisa, construí un rombo cuyas diagonales midan 6 cm y 4 cm.

Para hacer en la carpeta · GeoGebra · Para usar · Para comprobar

b) ¿Es posible dibujar un rombo diferente al que construiste en el ítem a)? ¿Por qué?

c) Explicá cómo puede construirse un rombo si se conocen las longitudes de sus diagonales.

PARA LEER ENTRE TODOS

- En todos los paralelogramos las diagonales se cortan en su punto medio y no siempre son congruentes.
- En los rectángulos las diagonales se cortan en su punto medio y son congruentes.
- En los rombos las diagonales se cortan en su punto medio, son perpendiculares y no siempre son congruentes.
- En los cuadrados las diagonales se cortan en su punto medio, son perpendiculares y congruentes.

ANALIZAR PROPIEDADES ENTRE TODOS

Analicen si las diagonales de un paralelogramo se encuentran siempre sobre las bisectrices de sus ángulos interiores. A partir de esta actividad colectiva los estudiantes podrán analizar que esto sucede solo en el caso de los paralelogramos que tienen sus cuatro lados congruentes, como el rombo y el cuadrado. Esto puede explicarse porque cada figura puede dividirse en triángulos isósceles a partir de sus diagonales. Para el caso de paralelogramos no rectángulos se pueden mostrar algunos contraejemplos. GeoGebra puede ser un buen recurso para explorar las diferentes construcciones asociadas a esta actividad.

En estas páginas se propone realizar construcciones que involucran figuras con ángulos rectos, las cuales apuntan a estudiar la propiedad que sostiene que “todo triángulo inscripto en una circunferencia, tal que uno de sus lados es diámetro, es un triángulo rectángulo”.

Triángulos rectángulos inscriptos en circunferencias

De a dos

1 Construyan una circunferencia de diámetro AB. Intenten ubicar un punto C en la circunferencia de manera que cumpla la condición en cada caso:

Para hacer en la carpeta

a) El triángulo ABC sea agudo en C.

b) El triángulo ABC sea recto en C.

c) El triángulo ABC sea obtuso en C.

d) Comparen las tres construcciones e intenten explicar por qué fue posible o no ubicar el punto C.

En el problema 1, y explorando las diferentes construcciones, los estudiantes podrán concluir que el triángulo ABC es siempre recto en C. En particular, si se utiliza GeoGebra, podrán identificar que el ángulo siempre será recto, mientras C no coincida con A ni con B. Una explicación posible para el ítem d) puede surgir a partir de analizar la construcción del problema 4 de la página 89. Será interesante discutir que, siempre que se tracen dos diámetros de una circunferencia y se unan sus extremos, quedará determinado un rectángulo. Por lo tanto, su diagonal lo dividirá en dos triángulos rectángulos.

De a dos

2 Dibujen una circunferencia y tracen un diámetro AC.

Para usar

Para resolver

GeoGebra

a) Marquen un punto B sobre ella de tal forma que el triángulo ABC sea isósceles. ¿En cuántos lugares se puede ubicar el punto B?

En el problema 2 a), los estudiantes podrán justificar que hay solo dos posiciones posibles para el punto B y ambas se encuentran sobre la mediatriz del segmento AC; por eso son equidistantes de sus extremos y el triángulo es isósceles. Otra posibilidad es que se apoyen en lo trabajado en el capítulo 3, a propósito de la congruencia de

b) ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC?

triángulos, o en la propiedad de los ángulos de los triángulos isósceles. Esta actividad puede dar indicios acerca de cómo construir un cuadrado inscripto en una circunferencia; si se la realiza en GeoGebra, los alumnos tendrán la posibilidad de explorar cómo cambian los triángulos al arrastrar el punto B sobre la circunferencia.

3 Trazá una circunferencia y luego construí un rectángulo no cuadrado inscripto en ella. ¿Cuántos rectángulos diferentes es posible construir?

Para usar

Para resolver

GeoGebra

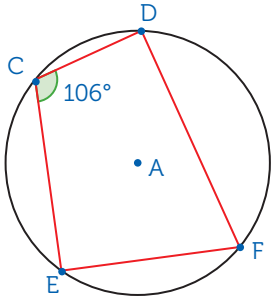
El docente podrá promover un debate en torno a las relaciones entre los problemas 3 y 4 a partir de los triángulos rectángulos ya tratados.

PARA LEER ENTRE TODOS

Una figura está **inscripta en una circunferencia** cuando todos sus vértices están sobre ella.
Si un segmento AB es un diámetro de una circunferencia y C es un punto sobre ella distinto de A y de B, el triángulo ABC es siempre rectángulo en C.

De a dos

4 El cuadrilátero CDFE está inscripto en la circunferencia centrada en A y los puntos C, A y F están alineados. Sin medir, hallen la medida de todos los ángulos interiores de la figura.



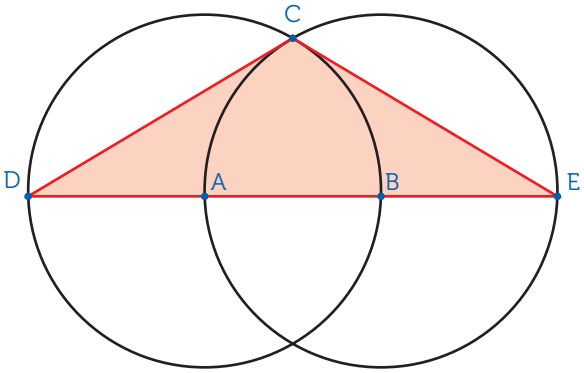
GeoGebra

Para comprobar

En el problema 4 los estudiantes podrían, entre otros procedimientos, trazar el diámetro CF, que es diagonal del cuadrilátero, para dividirlo en dos triángulos que (por lo estudiado en el problema 1) son rectángulos en D y en E. Si consideran que la suma de las medidas de los ángulos de los cuadriláteros es 360° (por estar formados por dos triángulos), será posible calcular la medida del ángulo DFE. El docente podrá incluir el debate en torno a que en un cuadrilátero inscripto en una circunferencia los ángulos opuestos siempre suman 180°.

Entre todos

5 En la figura, las circunferencias con centros A y B tienen el mismo radio, y C es uno de sus puntos de intersección. Los puntos D y E están sobre cada circunferencia y, además, están alineados con A y B. Sin medir, encuentren la medida del ángulo DCE.



Para resolver el problema 5, es probable que el docente tenga que sugerir a los estudiantes que consideren los triángulos ACE y BDC, a partir de trazar los segmentos AC y CB, identificando que quedan determinados dos triángulos rectángulos que se superponen formando un triángulo equilátero. De esta manera resulta que el ángulo CBA mide 60° y los ángulos DCA y BCE miden 30°. Entonces, el ángulo DCE mide 120°. O bien se puede partir del trazado de los radios AC y BC y considerar otros triángulos.

6 Construí un cuadrilátero inscripto en una circunferencia que tenga dos ángulos interiores rectos y que no sea un rectángulo.

Para usar

Para resolver

GeoGebra

ELABORAR EXPLICACIONES ENTRE TODOS

Busquen una manera de justificar esta afirmación, que es verdadera:

> Todos los cuadriláteros inscriptos en una circunferencia en los que una de sus diagonales es un diámetro tienen dos ángulos interiores opuestos y rectos.

En estas páginas se proponen problemas que involucran trabajar con trapecios isósceles y romboides, y algunas características de sus diagonales.

Algunos cuadriláteros que no son paralelogramos

De a dos **1**

En el ítem a) del problema 1, los estudiantes podrán concluir que hay infinitos cuadriláteros que se pueden construir sobre la base de las condiciones solicitadas. Un punto de partida para este análisis puede surgir al compartir las diferentes resoluciones en un espacio colectivo. Usando GeoGebra se puede construir el segmento AB y dos circunferencias de 3 unidades de radio, centradas en sus extremos. Luego, ubicar un punto C sobre una de ellas y, tomándolo como centro, trazar una nueva circunferencia de 4 unidades de radio. La intersección entre esta circunferencia y la de 3 unidades de radio que no contiene a C permitirá determinar el segmento CD. Arrastrando C, se podrán visualizar los cuadriláteros que cumplan con las condiciones pedidas.

a) Construyan un cuadrilátero ABCD que tenga las siguientes características:

- El lado AB mide 6 cm.
- Los lados BC y AD miden 3 cm.
- El lado CD mide 4 cm.

b) ¿Cuántos cuadriláteros diferentes se podrán construir con esos datos?

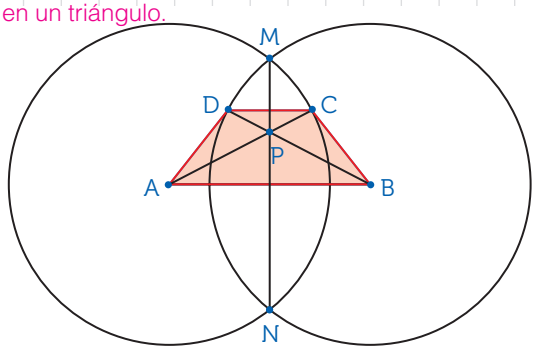
c) Si se agregara la condición de que el lado AB sea paralelo al lado CD, ¿cuántos cuadriláteros se podrían construir?

El ítem c) del problema 1 busca centrar la atención en el caso del trapecio isósceles, que algunos estudiantes tal vez reconozcan por haberlo analizado en los años anteriores y que, bajo las condiciones de este problema, es único. Un aspecto a destacar con los alumnos es que en ciertas ubicaciones del punto C "desaparece" el cuadrilátero, antes de transformarse en un triángulo.

De a dos **2**

En la siguiente figura se verifica que:

- El lado AB es paralelo al lado DC.
- Las circunferencias centradas en A y en B tienen el mismo radio. M y N son sus intersecciones.
- D y C están sobre las circunferencias centradas en B y A, respectivamente.
- P es la intersección entre $\overline{MN}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



a) ¿Es posible saber si las diagonales del cuadrilátero ADCB son congruentes?

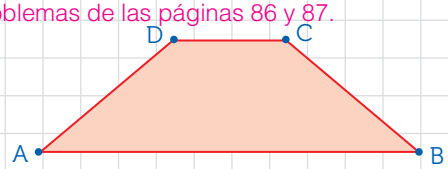
b) ¿Será cierto que los lados AD y CB son congruentes?

El problema 2 retoma las características de las figuras construidas en el problema 1: se trata de un cuadrilátero con un par de lados paralelos y dos lados opuestos congruentes. Para determinar la congruencia de los lados AD y CB, los estudiantes podrán partir de la comparación de los triángulos DPA y BPC, que son congruentes pues P pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$ y los ángulos DPA y BPC son congruentes por ser opuestos por el vértice.

De a dos **3**

El siguiente dibujo representa un trapecio isósceles. El ángulo A mide 40°. Sin medir, determinen la medida de los otros tres ángulos.

Para resolver el problema 3) los estudiantes podrían identificar que los dos ángulos que se apoyan sobre la base de un trapecio isósceles son congruentes, a partir de considerar los dos lados paralelos y las relaciones entre ángulos entre paralelas tratadas en los problemas de las páginas 86 y 87.



De a dos **4**

a) En una hoja lisa, construyan en cada caso un trapecio isósceles que tenga:

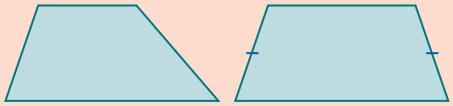
- Una base de 3 cm y diagonales de 2,5 cm.
- Una base de 4 cm y diagonales de 5 cm.

b) Analicen, para cada grupo de datos del ítem **a)**, si es posible construir más de un trapecio que cumpla con esas condiciones.

En este problema los estudiantes podrán basarse en la figura del problema 3 para la construcción de los trapecios solicitados. Para el segundo grupo de datos del ítem a) puede surgir el caso de una construcción que da lugar a un rectángulo, cuando el punto de intersección de las diagonales coincide con el punto medio de cada una de ellas.

PARA LEER ENTRE TODOS

Se denomina **trapecio** al cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos, llamados **bases**. Si los lados no paralelos son congruentes, recibe el nombre de **trapecio isósceles** y además cumple con que los dos pares de ángulos que se apoyan sobre las bases son congruentes.



5 a) Construí la figura que se indica en el siguiente instructivo:

Para usar

Para comprobar

GeoGebra

- Trazá $\overline{AC}$ de 5 cm de longitud.
- Marcá un punto P sobre $\overline{AC}$, que no sea su punto medio.
- Trazá una recta perpendicular a $\overline{AC}$, que pase por P. Llamala r.
- Trazá una circunferencia centrada en P, de 3 cm de radio. Llamá B y D a los puntos de intersección de dicha circunferencia con la recta r.
- Dibujá el cuadrilátero ABCD.

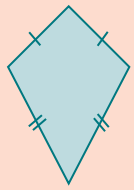
b) ¿Es cierto que $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son congruentes? ¿Pasará lo mismo con $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$?

c) ¿Será cierto que las diagonales del cuadrilátero ABCD son congruentes?

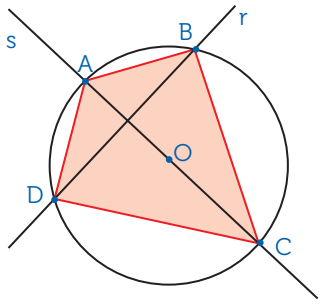
d) ¿Es cierto que el cuadrilátero es un rombo?

PARA LEER ENTRE TODOS

Se llama **romboide** al cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos congruentes.



6 En la siguiente figura, el cuadrilátero ABCD está inscripto en la circunferencia centrada en O. Los puntos A, O y C están sobre la recta s, que es mediatriz del segmento BD. Respondé estas preguntas, sin medir:



a) ¿Cómo se puede justificar que el cuadrilátero ABCD es un romboide?

b) ¿Cuánto miden los ángulos ABC y CDA?

El docente podrá propiciar un debate en torno a que los rombos pueden ser considerados casos particulares de los romboides, asunto que se trata también en el problema colectivo final.

ELABORAR EXPLICACIONES ENTRE TODOS

Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Busquen alguna manera de justificarlas.

- Todos los romboides tienen un par de ángulos interiores congruentes.
- Si las diagonales de un romboide se cortan en el punto medio de ambas, entonces se trata de un rombo.

Esta página propone trabajar con una serie de problemas de construcciones que involucran poner en juego propiedades estudiadas a lo largo del capítulo.

Más sobre construcciones de cuadriláteros

De a dos

1 a) ¿Cuál o cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden construirse con una diagonal de 3 cm y la otra de 4 cm?

Para usar

Para comprobar

GeoGebra

Rombo | Rectángulo | Romboide

b) En los casos en que no fuera posible construirlo, expliquen por qué. Si fuera posible, constrúyanlo.

Para resolver el problema 2, los estudiantes podrán ensayar el trazado de las construcciones. En este problema será necesario retomar el análisis de la desigualdad triangular, propiedad abordada en el capítulo 3.

2 Si fuera posible, en cada caso, construí un paralelogramo que tenga:

Para hacer en la carpeta

a) Dos lados consecutivos de 4 cm y 5 cm, y una de sus diagonales de 4,5 cm.

Para usar

b) Dos lados consecutivos de 3 cm y 5 cm, y una de sus diagonales de 2 cm.

Para comprobar

GeoGebra

3 Construí un trapecio isósceles que tenga una base que mida 4 cm, un ángulo interior de 50° y una diagonal de 6 cm. ¿Cuántos se podrían construir?

Para usar

Para comprobar

GeoGebra

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Analicen cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden construirse a partir de dos triángulos congruentes, de forma tal que una diagonal sea un lado compartido entre ellos.

Cuadrado | Rombo | Rectángulo | Paralelogramo | Trapecio isósceles | Romboide

En esta página se proponen problemas cuyo objetivo es explorar la congruencia de cuadriláteros, tomando como base el análisis de las figuras estudiadas a lo largo del capítulo y poniendo en juego algunas de sus propiedades.

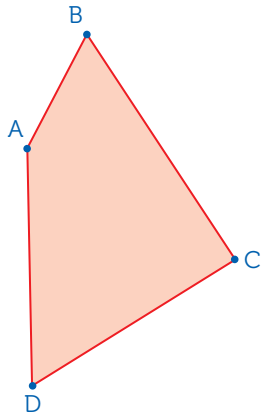
Comparación de cuadriláteros

1 a) Copiá la siguiente figura.

Para usar

Para comprobar

GeoGebra



En el ítem a) del problema 1 los estudiantes pueden identificar que para copiar un cuadrilátero no alcanza con considerar solo la medida de los lados, como en el caso de los triángulos. En el ítem b) pueden analizarse diferentes maneras de abordar el copiado: apoyándose en la medida de lados y ángulos interiores; dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos (por la diagonal AC o por BD) y copiando cada uno de ellos, etc.
A partir del ítem c) se puede concluir que es posible construir infinitos cuadriláteros. Esto puede identificarse utilizando GeoGebra y la posibilidad que brinda el movimiento, construyendo los lados a partir de circunferencias de radio fijo. El docente podrá ofrecer una idea intuitiva sobre la congruencia de cuadriláteros a partir de los criterios de congruencia de los triángulos que quedan determinados en los cuadriláteros.

b) ¿Qué tuviste en cuenta al realizar la copia en el ítem anterior?

c) ¿Es posible construir un cuadrilátero distinto a ABCD, cuyos lados sean congruentes a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$?

Entre todos

2 Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Para usar

Para comprobar

GeoGebra

a) Dos paralelogramos son congruentes si tienen dos lados consecutivos correspondientes de la misma longitud.

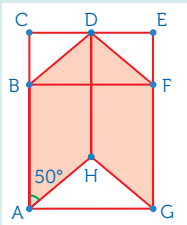
b) Si dos rombos tienen un lado y un ángulo correspondientes de la misma medida, entonces son congruentes.

c) Para que dos trapecios isósceles sean congruentes, alcanza con saber que las longitudes de sus lados paralelos correspondientes son iguales.

En la resolución del problema 2 no se espera que los alumnos identifiquen criterios de congruencia de cuadriláteros. Se trata de un trabajo exploratorio que tiene como punto de apoyo los criterios de congruencia de triángulos.

DECIDIR SI SON CONGRUENTES ENTRE TODOS

Decidan, sin medir, si los paralelogramos ABDH y HDFG son congruentes, sabiendo que ACEG es un rectángulo, B y F son puntos sobre $\overline{AC}$ y $\overline{GE}$, D es punto medio de $\overline{CE}$, $\overline{BF}$ // $\overline{AG}$ y $\overline{DH}$ // $\overline{AC}$.



RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1. Identifiquen en las páginas del capítulo qué problemas involucra cada uno de los siguientes conceptos:
   - Propiedades de los paralelogramos.
   - Diagonales de cuadriláteros.
   - Ángulos determinados por dos pares de rectas paralelas.
   - Triángulos inscriptos en circunferencias con uno de sus lados como diámetro.

2. Revisen los problemas de las páginas 86 y 87, y hagan una lista de las definiciones y propiedades que pusieron en juego al resolver cada uno de ellos. Pueden incluir dibujos, diagramas, ejemplos, etcétera.

3. Lean sus resoluciones de los problemas de las páginas 88 y 89. Elaboren instructivos que recuperen las construcciones de los diferentes tipos de paralelogramos, a partir de las medidas de sus diagonales.

4. Lean las páginas 90 y 91. Anoten qué cuestiones creen que es importante recordar acerca de los problemas que resolvieron y de las conclusiones a las que llegaron.

5. Analicen en qué casilleros pondrían "siempre", "a veces" o "nunca".

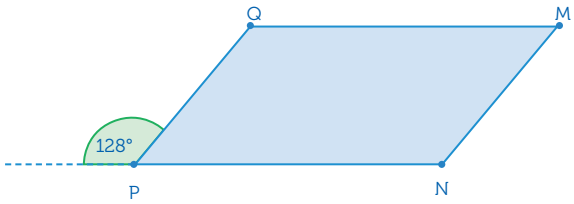
Figura	Las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.	Las diagonales forman ángulos rectos al cortarse.	Las longitudes de las diagonales son iguales.
Cuadrado			
Rombo (que no sea cuadrado)			
Rectángulo (que no sea cuadrado)			
Paralelogramo (que no sea rombo ni rectángulo)			
Trapecio isósceles			

6. Revisen el problema 2 de la página 95 y recopilen algunas ideas que permitan pensar condiciones para que dos cuadriláteros sean congruentes.

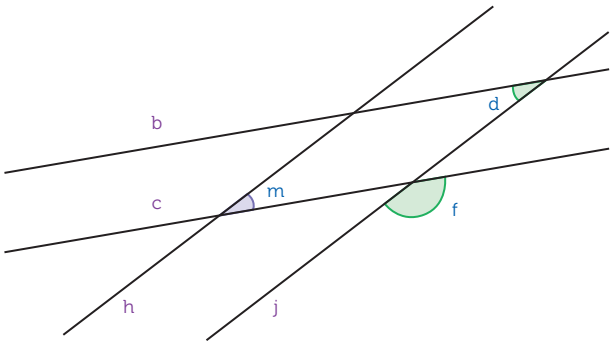
PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1 La figura está formada por el paralelogramo MNPQ y la prolongación de $\overline{NP}$. Hallá la medida de todos los ángulos interiores del paralelogramo, sin medir.



2 En la siguiente figura las rectas b y c son paralelas, al igual que las rectas h y j. Si $\hat{m} = 28°$, calculá las medidas de los ángulos marcados, sin medir.

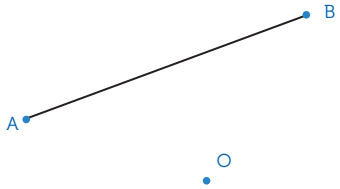


3 ¿Cuántos paralelogramos se pueden construir con cada grupo de datos?

a) Un ángulo interior de 30° y otro de 170°.
b) Un lado de 7 cm y otro de 4 cm.
c) Lados consecutivos de 2,5 cm y 3 cm, y el ángulo comprendido entre ellos de 60°.

4 En una hoja lisa, construí un cuadrado utilizando solamente regla no graduada y compás. Explicá cómo lo hiciste. Si lo hacés en GeoGebra, no uses la herramienta "polígono regular".

5 ¿Se podrá construir un rectángulo ABCD que tenga al punto O como intersección de sus diagonales y al segmento AB como uno de sus lados? ¿Cómo te das cuenta?



6 a) En una hoja lisa, construí un rombo que tenga lados de 3 cm y un ángulo interior de 40°.

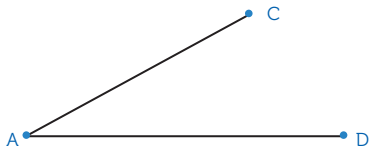
b) ¿Es posible dibujar un rombo diferente al que construiste?

7 En una hoja lisa, construí un paralelogramo que tenga un ángulo interior de 45° y lados de 5 cm y 3 cm.

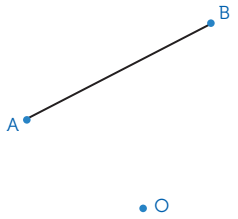
8 En una hoja lisa, construí un rectángulo que tenga diagonales de 4 cm. ¿Cuántos es posible construir?

9 En una hoja lisa, construí un paralelogramo cuyas diagonales midan 6 cm y 5 cm y que se corten formando un ángulo de 45°. ¿Cuántos es posible construir?

10 Completá el dibujo para obtener un paralelogramo ABCD tal que $\overline{AD}$ sea un lado y $\overline{AC}$ una de sus diagonales. Si lo vas a hacer en GeoGebra, completalo utilizando únicamente las herramientas "punto", "recta" y "circunferencia (centro, punto)".



11 a) Construí un paralelogramo ABCD sabiendo que O es el punto en el que se cruzan la diagonales y AB es uno de sus lados.



b) ¿Cuántos paralelogramos diferentes se pueden construir?

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si se trazan las diagonales de un rombo, queda dividido en cuatro triángulos rectángulos congruentes.
   b) Todos los paralelogramos tienen diagonales congruentes.
   c) Existen rectángulos con una diagonal de 2 cm y otra de 5 cm.

2. Construí una circunferencia y luego un rectángulo inscripto en ella que tenga diagonales de 5 cm.

3. En una hoja lisa, construí un trapecio isósceles ABCD cuya base $\overline{AD}$ mida 6 cm, y sus diagonales midan 7 cm y se corten a 3,5 cm de distancia de $\overline{AD}$.

4. En una hoja lisa, construí un romboide DEFG cuyas diagonales midan 8 cm y 6 cm, y el punto de intersección entre ellas esté a la misma distancia de tres de los vértices del romboide.

5. ¿Es posible construir un romboide de manera que...

   a) ...sus ángulos interiores midan 50°, 80°, 100° y 130°?

   b) ...tenga dos ángulos interiores de 100°?

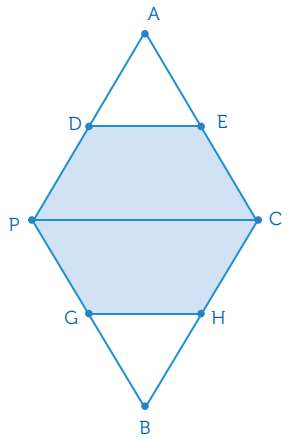
   c) ...tenga dos ángulos interiores de 25° y los otros dos de 125°?

6. Escribí condiciones que permitan saber si dos rombos son congruentes, apoyándote en lados, ángulos y diagonales y en los criterios de congruencia de triángulos.

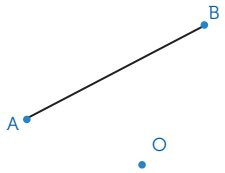
7. Decidí si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   Si las longitudes de dos lados consecutivos de un paralelogramo son iguales a las longitudes de dos lados consecutivos de otro, entonces los cuadriláteros son congruentes.

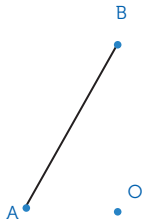
8 En la figura, $\overset{\Delta}{PAC}$ y $\overset{\Delta}{CBP}$ son equiláteros y los puntos D, E, H y G son puntos medios de los lados del cuadrilátero ACBP.
¿Es cierto que los cuadriláteros PDEC y CHGP son congruentes? Decidilo sin realizar mediciones.



9 Construí un trapecio isósceles ABCD que tenga al punto O como intersección de sus diagonales y al segmento AB como uno de sus lados.



10 Construí un rombo ABCD que tenga al punto O como intersección de sus diagonales y al segmento AB como uno de sus lados.



7 NÚMEROS RACIONALES II

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

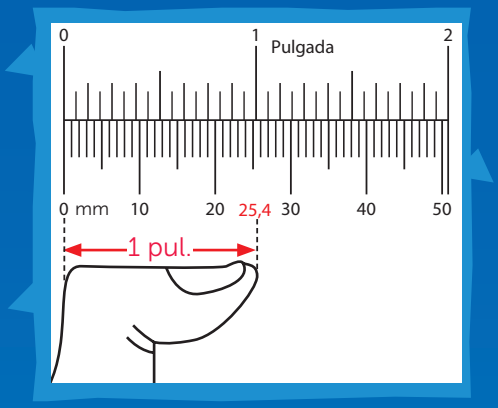
La **pulgada** es una unidad de longitud. Originalmente equivalía al ancho de la primera falange del pulgar. La equivalencia que se usa en nuestro país es:

1 pulgada = 2,54 centímetros = 25,4 milímetros.

Con la difusión del sistema decimal en el siglo XIX se fue abandonando el uso de la pulgada. Actualmente se sigue utilizando esta unidad de medida en herramientas, tuercas, caños, televisores y monitores. Por ejemplo:

- Las llaves combinadas tienen en sus extremos una boca abierta y otra cerrada. Las medidas de las bocas de este tipo de llaves se ajustan a las de los tornillos. Varían entre $\frac{1}{16}$ de pulgada y 1 pulgada.

- El tamaño de las cañerías se identifica en pulgadas, que corresponden a la medida de su diámetro.



En algunos países, las medidas de los caños y de las llaves se suelen identificar en dieciseisavos de pulgada. Por ejemplo, como $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, entonces una cañería de $\frac{1}{4}$ de pulgada de diámetro se conoce como "cañería de 4", en función del numerador de la fracción de denominador 16.

Una llave combinada denominada "de media" sirve para tornillos de media pulgada, a los que en algunos países se los identifica con $\frac{8}{16}$ de pulgada.

PARA PENSAR ENTRE TODOS

Daniel registró en una tabla las llaves que tenía en el taller para saber a cuántos milímetros corresponde la boca de cada una. Analicen cómo podrían hacer para completar cada casillero.

Pulgadas	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{16}$	1
Milímetros					12,7				25,4

Esta actividad apunta a que los alumnos operen con expresiones decimales apoyados en la idea de proporcionalidad desarrollada en el capítulo 3.

Con los problemas de estas páginas se pretende que los alumnos vuelvan sobre las relaciones entre fracciones y decimales con las que pudieron haber trabajado en años anteriores. Se trata de explicitar que, en el conjunto de números racionales, toda expresión decimal es equivalente a otras expresiones fraccionarias o incluso a expresiones que incluyen cálculos.

Relaciones entre expresiones decimales y fracciones

1 Para resolver

Sin apretar la tecla de la coma y haciendo un único cálculo, intentá que aparezca en el visor de la calculadora cada uno de los siguientes números.

a) 3,2 b) 4,57 c) 24,83

El problema 2 tiene por objetivo relacionar las escrituras fraccionarias y las decimales, particularmente teniendo en cuenta las fracciones decimales. A partir de su análisis, se espera que los estudiantes puedan reflexionar en torno al valor posicional de las cifras en las expresiones decimales.

2 Para resolver

Decidí si cada una de estas igualdades es verdadera o falsa.

a) $\frac{19}{10} = 0{,}19$

b) $3{,}5 = \frac{3}{5}$

c) $3{,}5 = \frac{35}{10}$

d) $\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 2{,}3$

e) $\frac{3}{5} = 0{,}6$

f) $\frac{375}{100} = 3 + \frac{75}{100}$

3 De a dos — Para hacer en la carpeta

Decidan, en cada caso, cuál o cuáles de las siguientes escrituras representan el mismo número.

a) $3{,}7$ | $\frac{3}{7}$ | $3 + 0{,}7$ | $\frac{30}{10} + \frac{7}{10}$ | $\frac{37}{10}$ | $\frac{370}{100}$ | $\frac{37}{100}$

b) $-\frac{1}{2}$ | $-1{,}2$ | $-0{,}5$ | $1 - \frac{1}{2}$ | $1 - \frac{15}{10}$ | $-\frac{5}{10}$ | $-\frac{50}{100}$

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Los **números racionales** son todos aquellos que pueden representarse mediante una fracción, es decir como el cociente entre dos números enteros, con divisor distinto de cero. También pueden representarse a través de expresiones decimales. Por ejemplo, $\frac{3}{4} = 0{,}75$ y $-\frac{1}{2} = -0{,}5$. Los números enteros también son números racionales.
Las fracciones con denominador 10, 100, 1.000, etc., se llaman **fracciones decimales**. Por ejemplo, $\frac{5}{10}, \frac{125}{100}, \frac{7}{1.000}$.

Los problemas 4 y 5 retoman cuestiones trabajadas en años anteriores, por lo que pueden ser dados como tarea, si el docente así lo considera.

4 Para comprobar

Determiná qué número se obtiene en cada caso.

a) $2 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} =$

b) $345 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1.000} =$

El problema 4 apunta a que los alumnos relacionen las escrituras decimales con las fracciones decimales y el valor posicional de sus cifras. Se retoma lo trabajado en los problemas 2 y 3, y los estudiantes podrán optar por expresar los números como fracciones o como decimales.

5 Para comprobar

El número 2,35 puede ser escrito como la suma entre un número entero y fracciones decimales con numeradores de una cifra: $2{,}35 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$. Escribí los siguientes números de la misma manera.

a) 6,45 b) 63,002 c) 22,507

La resolución de los ítems e) y f) del problema 6 resulta una oportunidad para que los alumnos recurran a las relaciones entre fracciones y decimales estudiadas y analicen cómo funcionan con números negativos. El docente podrá proponer que analicen la distancia al 0 de cada número como punto de apoyo.

6 Colocá <, > o =, según corresponda.

Para resolver

a) $\frac{9}{100}$ ____ $-0{,}1$

b) $10 \cdot \frac{5}{100}$ ____ $\frac{1}{10}$

c) $\frac{5}{10} + \frac{1}{100}$ ____ $0{,}5$

d) $0{,}2 + \frac{700}{1.000}$ ____ 1

e) $-\frac{9}{100}$ ____ $-0{,}01$

f) $-\frac{8}{10}$ ____ $-0{,}9$

7 a) ¿Entre qué números naturales consecutivos está cada una de las siguientes fracciones?

Para comprobar

____ $\frac{13}{10}$ ____

____ $\frac{39}{10}$ ____

____ $\frac{107}{10}$ ____

____ $\frac{173}{100}$ ____

____ $\frac{364}{100}$ ____

____ $\frac{1.200}{1.000}$ ____

b) Para cada fracción del ítem a), indicá de cuál de los dos números naturales está más cerca.

De a dos

8 Expresen, cuando sea posible, los siguientes números como fracciones de denominador 10, 100 o 1.000. En los casos en los que no sea posible, expliquen por qué.

Para comprobar

a) $0{,}25 =$

b) $\frac{23}{4} =$

c) $\frac{5}{8} =$

d) $\frac{19}{5} =$

e) $8{,}5 =$

f) $\frac{2}{9} =$

9 Ubicá los siguientes números entre los décimos más cercanos.

Para comprobar

a) ____ $\frac{1}{2}$ ____

b) ____ $-\frac{1}{2}$ ____

c) ____ $\frac{2}{5}$ ____

d) ____ $-\frac{2}{5}$ ____

e) ____ $\frac{23}{100}$ ____

f) ____ $-\frac{23}{100}$ ____

10 Completá con <, > o =, según corresponda.

a) $1{,}2$ ____ $1{,}20$

b) $\frac{3}{10}$ ____ $0{,}04$

c) $2{,}339$ ____ $2{,}34$

d) $1{,}300$ ____ $\frac{130}{100}$

ELABORAR EXPLICACIONES ENTRE TODOS

Expliquen diferentes maneras para transformar una expresión decimal en una fraccionaria y para transformar una expresión fraccionaria en una decimal.

Los problemas de estas páginas buscan poner en debate la posibilidad de que una fracción admita una escritura decimal finita o infinita periódica.

Expresiones decimales finitas y periódicas

De a dos

1 Decidan si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

Para resolver

Para resolver

a) La escritura decimal de $\frac{4}{3}$ tiene exactamente 10 cifras después de la coma.

b) Todas las cifras decimales de $\frac{4}{3}$ son iguales.

El problema 1 tiene como propósito trabajar con la cantidad de cifras que ofrece el visor de las distintas calculadoras. Si algunos alumnos resuelven la división 4 : 3 con el algoritmo, encontrarán que el resto es siempre el mismo si se continuara con este procedimiento infinitamente; esto servirá de apoyo para el ítem c).

c) La expresión decimal del resultado de 4 : 3 no termina nunca.

De a dos

2 ¿Es verdad que si una fracción admite una equivalente con denominador 100, entonces alguna de sus expresiones decimales tiene exactamente 2 cifras después de la coma?

El problema 2 permite poner en relación a la fracción decimal con la cantidad de cifras después de la coma que tendrá un número. Se trata de analizar con los alumnos que la afirmación no es verdadera en el caso de que el número sea entero, pero sí para cualquier otro caso en que las fracciones sean irreducibles.

De a dos

3 Busquen una fracción cuya expresión decimal tenga infinitas cifras decimales y otra cuya expresión decimal tenga exactamente 3 cifras decimales.

Para resolver

Para resolver

PARA LEER ENTRE TODOS

La **escritura decimal** de un número racional puede ser **finita** o **periódica**. Es finita cuando la parte decimal tiene una cantidad finita de cifras y es periódica cuando en la parte decimal las cifras se repiten infinitamente a partir de cierto lugar. Por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ es un número racional cuya representación decimal es periódica. Los puntos suspensivos indican que la cantidad de cifras decimales es infinita. También se suele utilizar la siguiente notación: $0{,}3333... = 0{,}\widehat{3}$. Debajo del arco se escribe el período, es decir, las cifras que se repiten infinitamente.

4 Sin hacer las divisiones, establecé cuántas cifras decimales tiene la expresión decimal que corresponde a cada una de las siguientes fracciones.

Para comprobar

Para comprobar

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{50}$

c) $\frac{17}{40}$

d) $\frac{8}{125}$

En la resolución del problema 4 se espera que los estudiantes relacionen la cantidad de cifras después de la coma de una expresión decimal con la existencia de una fracción decimal equivalente a la propuesta en cada caso.

De a dos **5** a) Completen el cuadro de manera que, en cada fila, las expresiones representen el mismo número.

Para comprobar

Para comprobar

Fracción	Fracción equivalente con denominador 10	Fracción equivalente con denominador 100	Fracción equivalente con denominador 1.000	Escritura decimal
$\frac{1}{4}$	No existe	$\frac{25}{100}$	$\frac{250}{1.000}$	0,25
$\frac{1}{3}$				
$\frac{13}{5}$				
$\frac{15}{8}$				
$\frac{12}{7}$				
$\frac{27}{6}$				

En el problema 5 los alumnos podrían apelar a relaciones como las siguientes: 13/5 se puede escribir como una fracción de denominador 10 porque 5 es divisor de 10. En cambio, 1/3 no puede representarse con una fracción cuyo denominador sea una potencia de 10, ya que ninguna potencia de 10 es múltiplo de 3. Las discusiones en torno a la escritura decimal podrían propiciar el análisis acerca de los casos en los que se obtuvo una cantidad infinita de cifras decimales, y en qué casos una cantidad finita.

b) Analicen si es posible saber, antes de hacer cuentas, si una fracción admite una escritura decimal finita o no.

En el ítem b) se apunta a estudiar que un número racional tiene una expresión decimal finita cuando el número puede representarse mediante una fracción irreducible cuyo denominador solo tenga como factores a potencias de 2 y/o de 5.

De a dos **6** Usando que $\frac{4}{9} = 0,\widehat{4}$, encuentren una fracción que represente a cada uno de los siguientes números.

La intención del problema 6 es que los alumnos realicen un análisis de las transformaciones que sufre cada número respecto del dato y su incidencia en las nuevas expresiones. Por ejemplo, para 0,04444…, se podrá pensar que es el resultado de dividir por 10 la fracción 4/9, es decir que 0,04444… = 4/9 : 10 = 4/90.

a) 0,2222… b) 0,04444… c) 2,4444… d) 0,1111… e) 2,354444…

Para comprobar

Para comprobar

PARA LEER ENTRE TODOS

La siguiente es una manera de hallar una representación fraccionaria para un número decimal periódico.

Si se considera el número **p** = $3,\widehat{27}$= 3,272727 y se lo multiplica por 100, se obtiene otro número que tiene el mismo período que **p**:

$$100\,\mathbf{p} = 327,272727...$$

Si se restan estos números, por un lado se obtiene 100 **p** – **p** = 99 **p**, y, por el otro, 327 – 3:

$$\begin{array}{rl} & 100\,\mathbf{p} = 327,27272727... \\ - & \mathbf{p} = 3,27272727... \\ \hline & 99\,\mathbf{p} = 327 - 3 + 0,2727272... - 0,27272727... = 324 \end{array}$$

Entonces, como 99 **p** = 324, resulta que **p** = $\frac{324}{99}$. Luego, 3,272727... = $\frac{324}{99}$.

DECIDIR LA VERDAD O FALSEDAD ENTRE TODOS

El apartado "Para leer entre todos" es una oportunidad para analizar con los alumnos un tipo de trabajo algebraico que puede colaborar en la comprensión de ciertas relaciones en las que se sustentan algunas técnicas y que requieren instancias de reflexión, en este caso, para transformar una expresión decimal periódica en una fracción.

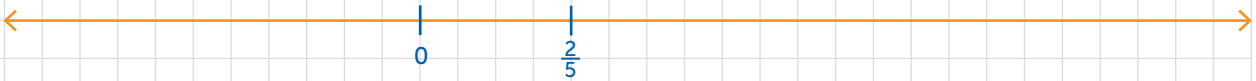
Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Toda fracción admite una fracción equivalente cuyo denominador es una potencia de 10.
- Si el denominador de una fracción es 6, entonces no admite una escritura decimal finita.

En estas páginas se propone abordar el orden en el conjunto de los números racionales promoviendo el estudio de distintas estrategias de comparación entre números. La recta numérica se presenta como una herramienta para ese fin, a la vez que permite establecer la correspondencia entre un número racional y un punto. Esto retoma el trabajo propuesto en el capítulo 2, "Números enteros". Finalmente se inicia el estudio de la densidad en $\mathbb{Q}$.

Orden, recta numérica y densidad

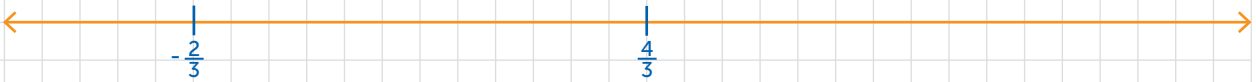
1 a) Ubicá en la siguiente recta los números 2 y −1.



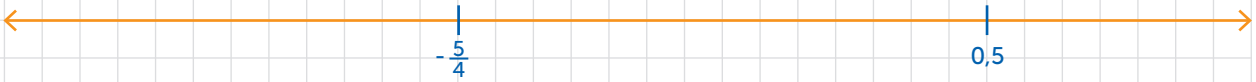
b) Ubicá sobre la misma recta los números $-\frac{2}{5}$ y $-\frac{1}{5}$.

2 Ubicá en cada recta los números que se proponen.

a) 0; $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{6}$.



b) 0; −2,5 y $-\frac{3}{2}$.



De a dos

3 Dos robots, A y B, salen del 0 hacia la derecha sobre una recta numérica. El robot A llega al 2 en 3 pasos. El robot B llega al 4 en 5 pasos. ¿Cuál de los dos robots da el paso más largo?

De a dos

4 Dos robots, A y B, salen del 0 y caminan hacia la derecha sobre una recta numérica. El robot A llega al 7 en 4 pasos. El robot B llega al 4 en 2 pasos y medio. ¿Cuál de los dos robots da el paso más largo?

5 a) Ordená los siguientes números de menor a mayor: $\frac{7}{8}$; $-\frac{12}{16}$; 0,4; $-\frac{4}{3}$; $\frac{14}{5}$.

El problema 5 busca que los alumnos recuperen o elaboren criterios de comparación a partir de las relaciones que se podrían establecer. Por ejemplo, que 0,4 es menor que 1/2 y 7/8 es mayor, entonces 7/8 es mayor que 0,4; que 7/8 es menor que 1 y que 14/5 es mayor que 1, así que 7/8 es menor que 14/5, etc.

b) Intercalá las fracciones $-\frac{2}{3}$ y $\frac{13}{9}$ entre los números del ítem a), de manera que el orden se conserve.

De a dos **6** a) ¿Cuántas fracciones con denominador 9 hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{3}$? ¿Y entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$?

b) ¿Cuántas fracciones con denominador 18 hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$? ¿Y con denominador 90?

El problema 6 plantea el análisis de la cantidad de números racionales que se pueden encontrar, bajo ciertas condiciones, entre dos fracciones. El docente podrá proponer una reflexión acerca de que a medida que aumenta el denominador de las fracciones que se buscan entre otras dos, se irán encontrando más, comenzando a construir la idea de que hay infinitas.

7 a) Encontrá, si fuera posible, una fracción y un número decimal mayores que $\frac{1}{4}$ y menores que $\frac{13}{20}$.

b) ¿Cuántos es posible encontrar en cada caso?

c) ¿Hay alguna fracción con denominador 5?

d) ¿Hay alguna fracción decimal?

PARA LEER ENTRE TODOS

Entre dos números racionales siempre es posible encontrar infinitos números racionales. Esta propiedad que verifican los números racionales se denomina **densidad**.

DECIDIR LA VERDAD O FALSEDAD ENTRE TODOS

Decidan si cada afirmación es verdadera o falsa.

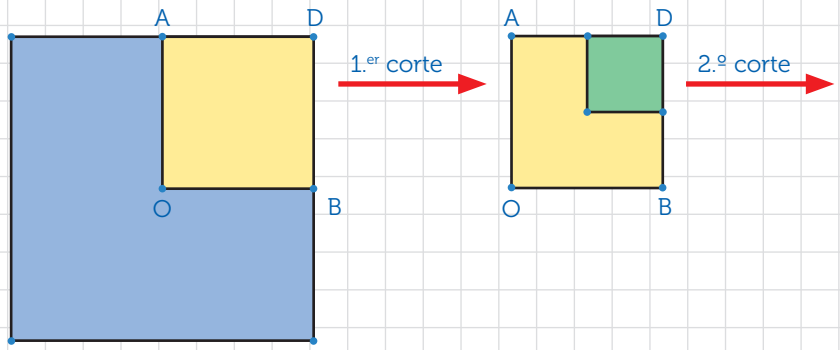
- Entre dos fracciones hay siempre un número entero.
- Entre dos números enteros siempre es posible encontrar una fracción.
- Entre dos fracciones hay siempre una fracción.
- Entre dos fracciones hay siempre una fracción de denominador 10.
- Entre dos fracciones hay siempre un número decimal.
- Entre dos fracciones hay siempre un número periódico.

Potencias y raíces

En las siguientes páginas se extienden las propiedades de potenciación y radicación abordadas con los números enteros en el capítulo 2.

De a dos

1 De un cuadrado de 1 m de lado se corta otro cuadrado, como se ve en la figura. A y B son los puntos medios de dos lados del cuadrado original. El cuadrado obtenido se vuelve a cortar siguiendo el mismo criterio. Los dibujos muestran cómo se obtienen los distintos cuadrados.



En el problema 1 se pretende trabajar con potencias cuya base es un número racional. El docente podrá proponer la confección de una tabla escribiendo el área del cuadrado obtenido en relación con el número de corte efectuado (o bien a partir de la variación de la longitud de los lados). Se espera que los alumnos identifiquen que, en cada corte, el área del cuadrado obtenido es la cuarta parte del área del cuadrado que se cortó; y a partir de allí asocien la idea de 1/4 de 1/4, etc., con las escrituras multiplicativas: 1/4 · 1/4…, en función de la cantidad de cortes que llevan realizados.

a) ¿Cuál es el área del cuadrado amarillo que se obtiene del primer corte?

b) Calculen el área del cuadrado de color verde que se obtiene en el segundo corte.

c) ¿Cuáles serán las áreas de los cuadrados que se obtengan en el tercero y en el cuarto corte? ¿Y en el décimo corte?

d) Escriban una expresión general que permita encontrar el área del cuadrado generado por el corte número **n**.

2 Decidí para cada caso si la igualdad es verdadera o falsa.

Para resolver

Para resolver

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{5}$ b) $(-0{,}5)^2 = -1$ c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ d) $\frac{3}{2^5} = \frac{3}{32}$

De a dos

3 En los casos en que sea posible, escriban cada cálculo como una única potencia.

Para comprobar

Para comprobar

Para hacer en la carpeta

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

c) $\frac{9}{25} \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} =$

d) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} =$

e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} =$

f) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{-2} =$

En el problema 3 e) los alumnos podrían resolver las multiplicaciones 2/3 · 5/7 = 10/21, para arribar a que 2/3 · 5/7 · 2/3 · 5/7 = 10/21 · 10/21 = $(10/21)^2$.

En el problema 4 se espera que los estudiantes analicen cómo van variando las potencias a medida que el exponente disminuye una unidad, identificando que se van dividiendo por 2 o por 2/3, respectivamente. Como parte de la puesta en común, el docente podrá proponer un análisis de los resultados en función de los exponentes.

De a dos

4 Completen las tablas que relacionan potencias de números con sus resultados.

Para resolver

Para resolver

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
32	16	8	4	2	1				

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$
$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1					

De a dos

5 Candela y Agustín buscan resolver $\frac{2^4}{2^7}$. Candela dice que da 2^{-3}. En cambio, Agustín dice que da $\frac{1}{8}$. ¿Es posible que los dos tengan razón?

PARA LEER ENTRE TODOS

El siguiente desarrollo explica el modo de hallar una **potencia de base racional y exponente negativo**.

Se sabe que el resultado de un cociente de potencias que tienen la misma base se obtiene a partir de lo siguiente:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}.$$

Por otro lado, resulta que:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^7} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

A partir de los dos desarrollos anteriores debe verificarse que:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

En general, $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{-\mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}}$, donde **n** es un número natural y **a** y **b** son diferentes de cero.

De a dos

6 Resuelvan los siguientes cálculos.

Para resolver

Para resolver

a) $\sqrt{\frac{81}{16}} =$

b) $\sqrt{\frac{441}{225}} =$

c) $\sqrt[3]{\frac{512}{27}} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{343}{1.000}} =$

e) $\sqrt{0,49} =$

f) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$

Entre todos

7 Encuentren, si fuera posible, el o los valores de **m** para que la igualdad sea verdadera en cada caso.

Para comprobar

Para comprobar

a) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\mathbf{m}} = \frac{625}{81}$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\mathbf{m}} = \frac{1}{729}$

c) $\sqrt[3]{\mathbf{m}} = \frac{6}{7}$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{\mathbf{m}} = -\frac{625}{81}$

e) $\sqrt{\mathbf{m}} = \frac{25}{9}$

f) $\sqrt[3]{\mathbf{m}} = -\frac{1}{10}$

En la resolución del problema 7 será interesante que el docente propicie cierto nivel de anticipación que podrían desplegar los alumnos, por ejemplo que si la base es negativa y la potencia positiva, el exponente deberá ser par. Es decir, recurrir a las relaciones para que no sea un trabajo de ensayo y error.

El problema colectivo final apunta a analizar la variación de la potencia según el signo del exponente y compararla con la base. El problema también permite retomar la idea de que, en $\mathbb{Q}$, multiplicar no siempre "agranda".

BUSCAR NÚMEROS QUE CUMPLEN CONDICIONES ENTRE TODOS

- Si **a** representa un número entero, ¿qué valores puede tomar **a** para que $\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathbf{a}}$ sea mayor que 1?

Con los problemas de esta página se busca trabajar algunos aspectos conceptuales de la potenciación y analizar la economía de la escritura que procura la notación científica.

Notación científica

De a dos

1 Resuelvan los siguientes cálculos.

Para resolver

Para resolver

a) 349 · 10.000.000.000 =

b) 4.300 · 100.000.000 =

c) 49 · 10.000.000.000 =

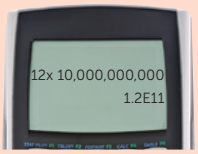
d) 52 · 0,0000000000001 =

El problema 1 permite analizar con los alumnos la notación que usan las distintas calculadoras: común, científica, aplicaciones de celulares, aplicaciones de notebooks, etc. Será interesante poner en relación la cantidad de dígitos que admite el visor con el tipo de escritura que muestra. Por ejemplo, en las calculadoras de los celulares se muestran los resultados según lo permita el visor de acuerdo a la orientación de la pantalla y en la posición horizontal es posible visualizar más dígitos. Se trata de que los alumnos identifiquen que las calculadoras "devuelven" un número combinando potencias de 10 con expresiones decimales. El docente podrá proponer que incrementen la potencia de 10 por la que se multiplica hasta que no entre la escritura numérica en las pantallas de las que disponen los alumnos.

PARA LEER ENTRE TODOS

Para escribir números de más cifras que los dígitos que tiene el visor, muchas calculadoras usan notaciones diferentes.

Por ejemplo, en las siguientes calculadoras se expresa el resultado de 12 · 10.000.000.000.



Cuando el número se escribe de la forma **a** · 10^{n}, donde **a** es un número racional mayor o igual que 1 y menor que 10, y **n** es un número entero, se dice que el número está expresado en **notación científica**.

Por ejemplo: 12 · 10.000.000.000 = 1,2 · 10^{11} ; 13 · 0,000000000001 = 1,3 · 10^{-11}.

2 a) ¿Cuáles de las siguientes escrituras son equivalentes a 132 · 1.000.000?

- 132 · 10^{6}
- 132.000 · 10^{3}
- 1,32 · 10^{8}
- 0,132 · 10^{9}
- 1,32E08

b) ¿Cuál o cuáles de las escrituras anteriores expresan el resultado en notación científica?

En el caso de la última escritura propuesta, es probable que sea necesario aclarar a los alumnos que esta notación –al igual que algunas de las que se han analizado en el cartel "Para leer entre todos"– proviene de la tecnología y no de la matemática, ya que algunas calculadoras registran de esta manera la notación científica.

3 Expresá cada número en notación científica.

a) 321,65 =

b) 432,123 =

c) 2.456.000.000 =

d) 0,000006 =

e) 0,0000065 =

f) 0,000324 =

4 Si la distancia del planeta Vulcano a la estrella Diwo es de 5,79 · 10^{10} m y la distancia del planeta Trap a la misma estrella es de 1,08 · 10^{11} m, ¿cuál de los dos planetas está más cerca de la estrella Diwo?

5 Si el tamaño promedio de un microbio es de 4 · 10^{-6} cm y el tamaño promedio de un virus es de 2 · 10^{-8} cm, ¿cuál de los dos microorganismos es más pequeño?

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

- ¿Será cierto que 10^{-5} es mayor que 10^{-1}?
- Escriban una potencia de 10 menor que 10^{-9}.
- ¿Habrá alguna potencia de 10 que sea negativa?

En esta página se propone comenzar un recorrido exploratorio con números irracionales bajo la forma de raíz cuadrada y con leyes de formación de la expresión decimal infinita no "atrapable" con un período.

Noción de número irracional

De a dos

1 La siguiente tabla muestra los cuadrados de los números **a**, **b** y **c** que cumplen la condición $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$, presentada en la apertura del capítulo 5. Completen con los números que faltan.

Para resolver

Para resolver

a^2	b^2	c^2	a	b	c
9	16	25	3	4	5
144	25				
1	1				

En el problema 1) los alumnos se enfrentan con la imposibilidad, en algunos casos, de encontrar números enteros que verifiquen la condición. Este problema apunta, desde un trabajo exploratorio, a que los alumnos comiencen a asociar a $\sqrt{2}$ como la expresión de un número y no como una operación.

2 Buscá un número que elevado al cuadrado dé 5.

Para hacer en la carpeta

Para resolver

Para resolver

El problema 2 intenta propiciar un espacio exploratorio de búsqueda en el cual el uso de la calculadora permita poner en debate la existencia de dicho número, la cantidad de cifras e introducir la idea de que la raíz cuadrada de 5 tiene infinitas cifras decimales que, en principio, no parecen ser periódicas.

PARA LEER ENTRE TODOS

Los **números irracionales** son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas; por lo tanto, no es posible escribirlos como una fracción. Por ejemplo, si se considera que la parte decimal del número 5,010010001... se forma agregando un cero cada vez, se puede asegurar que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y por lo tanto es irracional. Lo mismo ocurre con $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π; etcétera.

De a dos

3 Inventen un número irracional y expliquen cómo se dan cuenta de que lo es.

Se espera, en el problema 3, que los alumnos inventen alguna sucesión de cifras decimales configuradas de cierta manera que evidencien la ausencia de periodicidad. O bien, podrían recurrir a raíces y al uso de la calculadora para tratar esta cuestión.

Para hacer en la carpeta

Para resolver

Para resolver

PARA LEER ENTRE TODOS

En numerosas oportunidades, para tratar con expresiones irracionales se recurre a aproximaciones por truncamiento o redondeo.

El **truncamiento** consiste en escribir un número con la cantidad deseada de decimales que sea menor o igual que el número a aproximar. Por ejemplo, para 3,8574459..., el truncamiento a dos cifras decimales sería 3,85, y a tres cifras decimales, 3,857.

El **redondeo**, en cambio, consiste en buscar un número con la cantidad deseada de decimales y que sea el más cercano al número a aproximar. Para ello, si la cifra que sigue a la última es menor que 5, el último dígito no cambia, mientras que si esta cifra es mayor o igual que 5, se suma 1 a la última cifra a escribir. Por ejemplo, el redondeo a una expresión de dos cifras decimales de 3,8572259 sería 3,86, y a tres cifras decimales, 3,857.

4 Aproximá los siguientes números irracionales a los milésimos, por redondeo y por truncamiento.

Para hacer en la carpeta

Para resolver

Para resolver

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{21}$

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Para resolver el segundo ítem de la sección colectiva final, se espera que los estudiantes puedan identificar el menor y el mayor número que se redondean a 3,845; es decir, 3,8445 y 3,8455 (este último, sin incluirlo).

- Inventen un número irracional de manera que al truncarlo a 5 cifras decimales resulte igual que al redondearlo a 5 cifras decimales.
- Escriban diez números con los que, al redondearlos a 3 cifras decimales, se obtenga 3,845.

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1. Seleccionen el problema de las páginas 102, 103, 104 y 105 que les haya parecido más difícil. Escriban por qué les parece difícil y también un consejo para resolver otro problema parecido.

2. Indiquen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

   a) Los números racionales siempre tienen un desarrollo decimal finito.
   b) Los números racionales solo se pueden expresar como fracciones.
   c) Los números irracionales solo se pueden escribir usando expresiones con raíces cuadradas.
   d) Las raíces cuadradas de números positivos son siempre números irracionales.

3. Luego de volver a mirar los problemas 4 y 5 de la página 110, inventen un problema en el que sea necesario el uso de la notación científica para resolverlo.

4. ¿Cómo le explicarían a un compañero cómo pensaron para ordenar los números racionales del problema 5 de la página 107?

5. Candela dice que entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{3}{10}$ se encuentra solo la fracción $\frac{2}{10}$. ¿Tiene razón? ¿Cómo lo habrá pensado?

6. ¿Cómo le explicarían a un compañero de qué manera aproximar por redondeo a los milésimos un número irracional? ¿Y por truncamiento?

7. Escriban 3 números irracionales y aproxímenlos a los centésimos por redondeo y por truncamiento.

8. Vuelvan a mirar los problemas que resolvieron en este capítulo, completen los que hayan quedado sin resolver y revisen los errores. Anoten las dudas que les surjan para aclararlas entre todos.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Descomponé los siguientes números como suma de enteros, fracciones con denominador 10, 100, 1.000, etc., y numerador de una cifra.

a) 0,83
b) 1,402
c) 16,005
d) 24,5478

2 Escribí el resultado de cada suma con una expresión decimal.

a) $1+\frac{8}{10}+\frac{3}{100}=$

b) $17+\frac{5}{10}+\frac{7}{1.000}=$

c) $45+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1.000}=$

d) $\frac{87}{10}+\frac{56}{100}=$

e) $\frac{123}{10}+\frac{213}{100}+\frac{1.001}{1.000}=$

3 Decidí, sin hacer divisiones, si la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones es finita o periódica.

a) $\frac{6}{7}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{3}{125}$

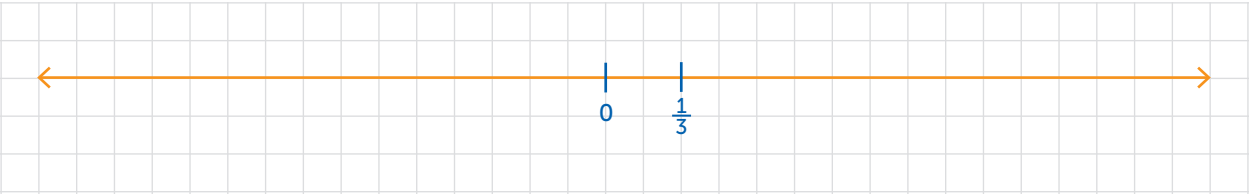
e) $\frac{9}{35}$

f) $\frac{7}{5}$

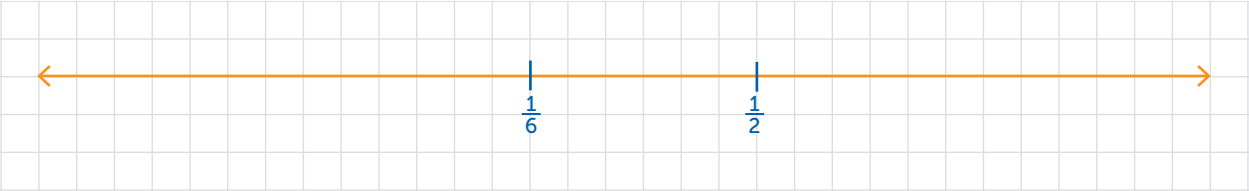
4 Usando que $\frac{1}{9}=0{,}1111...$, encontrá una fracción para cada uno de estos números.

a) 0,001111...
b) 1,1111...
c) 2,391111...
d) 2,1111...
e) 0,7777...

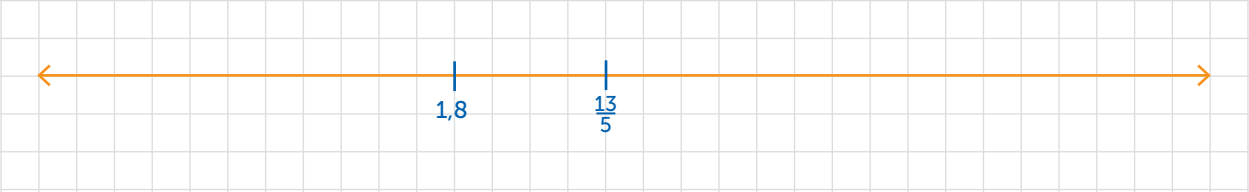
5 Ubicá los números 1 y −2 en esta recta.



6 Ubicá en esta recta numérica los números 0, $\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}$.



7 Ubicá el 0 y el 1 en esta recta numérica.



8 Completá, si fuera posible, los lugares en blanco de manera que en cada fila las expresiones representen el mismo número.

Fracción	Fracción equivalente con denominador 10	Fracción equivalente con denominador 100	Fracción equivalente con denominador 1.000	Escritura decimal
$\frac{1}{2}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{17}{8}$				
$\frac{4}{11}$				

9 Ubicá los siguientes números entre los milésimos más cercanos.

a) ____ $\frac{1}{8}$ ____

b) ____ $\frac{23}{7}$ ____

c) ____ $\frac{3}{4}$ ____

d) ____ $-\frac{21}{5}$ ____

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 a) ¿Cuántas fracciones con denominador 15 hay entre $\frac{4}{15}$ y $\frac{3}{5}$?

b) ¿Y que tengan denominador 30?

c) ¿Y que tengan denominador 10?

d) ¿Hay fracciones con expresión decimal periódica entre $\frac{4}{15}$ y $\frac{3}{5}$?

2 Escribí fracciones entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5}$ que cumplan con la condición que se pide en cada caso.

a) Que tengan una expresión decimal finita.

b) Que tengan una expresión decimal infinita periódica.

3 En los casos en que sea posible escribí como una única potencia, sin resolver los cálculos.

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} =$

c) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^3\right]^3 =$

4 Resolvé el siguiente cálculo.

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} =$$

5 Sin hacer cuentas ni usar calculadora, indicá cuáles de estos cálculos darán el mismo resultado.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^8$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-8}$ $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$

6 Completá la tabla con potencias sucesivas decrecientes de 3.

3^4									
81									

7 Escribí el exponente que falta para que se cumpla cada igualdad.

$281 = 2{,}81 \cdot 10^{\_\_\_}$

$3{,}05 \cdot 10^{-2} = 305 \cdot 10^{\_\_\_}$

$1{,}32 \cdot 10^{-1} = 132 \cdot 10^{\_\_\_}$

8 a) Para cada uno de los siguientes números, agregá 10 cifras decimales siguiendo el patrón de formación.

0,10110111011110...

2,88888888...

5,12131415161718...

4,713713713713...

b) En los casos en que sea posible, escribí las expresiones anteriores como fracciones.

9 Aproximá la expresión decimal de los siguientes números a los milésimos, por redondeo.

a) $\sqrt{13}$

b) $\sqrt{7}$

10 Natalia usó la calculadora para conocer la expresión decimal de $\frac{7}{9}$ y obtuvo 0,777777778. Milagros, con su calculadora, obtuvo 0,77777777, pero al "deslizar el dedo por el visor" siguen apareciendo sietes.
¿Cómo podés explicar lo que sucedió?

11 Lautaro aproxima el número $\sqrt{13}$ como 3,6. Santiago también aproxima el número $\frac{179}{50}$ con 3,6. Explicá por qué es posible aproximar números diferentes con la misma expresión decimal.

8 FUNCIÓN LINEAL

El objetivo de esta presentación y de la actividad colectiva final es que los alumnos puedan identificar que el movimiento de un objeto puede ser o no constante y que una de las maneras de identificarlo es a partir de su estudio en intervalos, del gráfico que lo representa y de las relaciones que se van estableciendo entre las variables que lo describen. No se trata de arribar a una definición sino de que se pueda determinar que no siempre un movimiento es uniforme a partir de alguna información.

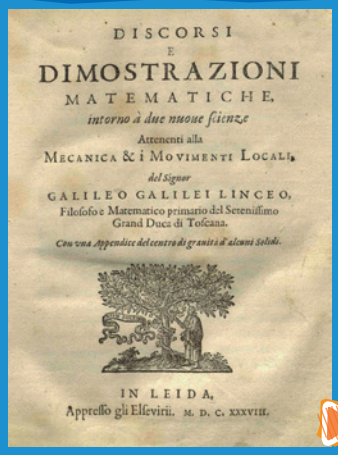
COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

Desde la Antigüedad distintas culturas estuvieron interesadas en estudiar fenómenos naturales en los que una magnitud variaba cuando lo hacía otra. Por ejemplo, los babilonios elaboraron registros de las variaciones en la luminosidad de la Luna a medida que pasaba el tiempo.

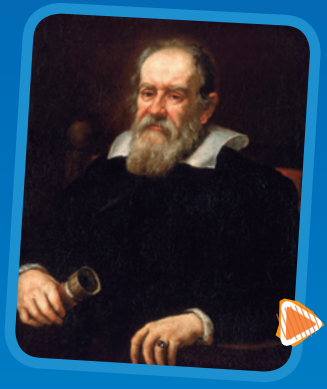
En el siglo XIV se logró dar un paso importante hacia la futura "matematización del movimiento", estudiando lo que hoy llamamos **movimiento uniforme**. Entre otros aspectos, se avanzó en los estudios de la variación de temperatura durante el enfriamiento y el calentamiento de los cuerpos.

En el año 1638 Galileo Galilei publicó una obra en la que definió con precisión el movimiento uniforme: "Entiendo por movimiento uniforme aquel en el que las distancias recorridas por el móvil durante cualesquiera intervalos iguales de tiempo son, entre sí, iguales".

El propio Galileo aclaraba que "puede suceder que el móvil recorra espacios iguales durante tiempos iguales, y que sin embargo no sean iguales los espacios recorridos durante algunas fracciones más pequeñas, entre sí iguales, de esos mismos tiempos".


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elseviri. M. D. C. XXXVIII.

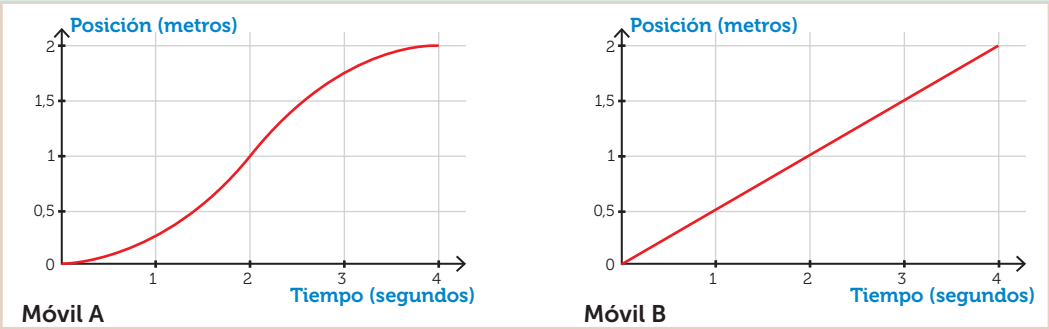
Portada original del libro ***Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*** (1638).



Galileo, retrato realizado por Justus Sustermans (1636).

PARA PENSAR ENTRE TODOS

Los siguientes gráficos representan las posiciones de dos móviles A y B, en función del tiempo.



- ¿Es cierto que los móviles A y B recorren 1 metro durante los primeros dos segundos? ¿Y entre los dos segundos posteriores?
- ¿Es cierto que en todos los intervalos de 1 segundo el móvil B recorre la misma distancia? ¿Y el móvil A?
- ¿Cuál de los dos podría corresponder a un movimiento uniforme?

Los problemas de estas páginas se proponen recuperar la noción de proporcionalidad de manera que resulten un punto de apoyo para avanzar en la noción de función lineal. Se presenta una caracterización de las funciones lineales como funciones de proporcionalidad a las que se le suma un valor constante. Es decir, funciones para las cuales lo proporcional es su variación.

Relaciones entre variables que incluyen proporcionalidad

De a dos

1 Una pileta que tiene cierta cantidad de agua se llena mediante una bomba que opera a ritmo constante.

a) Completen la tabla, que indica la cantidad de agua que entró a la pileta en función del tiempo transcurrido desde que comenzó a operar la bomba.

Tiempo (minutos)	0	2	3		
Cantidad de agua que entró (litros)			600	1.200	2.000

b) ¿Cuántos litros de agua por minuto ingresan a la pileta?

c) Sabiendo que la pileta contenía 600 litros cuando comenzó a llenarse, confeccionen una nueva tabla de manera que indique la cantidad de agua que contiene la pileta en función del tiempo transcurrido desde que comenzó a operar la bomba.

Los estudiantes podrían resolver el problema 2 c) sumándole 600 litros a cada uno de los valores de la segunda fila de la tabla original. Sin embargo, también es posible que algunos alumnos completen los valores realizando cálculos a partir de los datos de la situación.

d) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas corresponden a la situación descrita en a)? ¿Y a la situación descrita en c)?

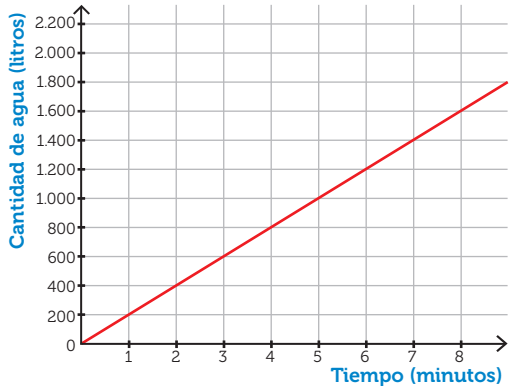
$f(\mathbf{x}) = 200(\mathbf{x} + 600)$

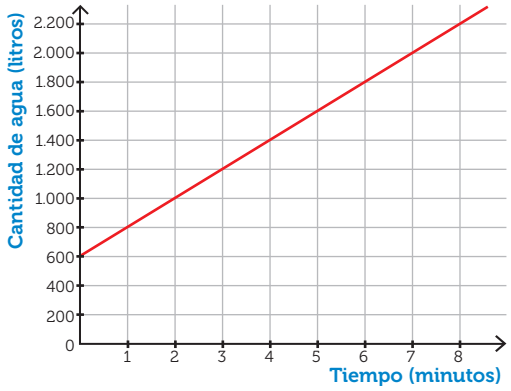
$f(\mathbf{x}) = 200\mathbf{x} + 600$

$f(\mathbf{x}) = 200\mathbf{x}$

$f(\mathbf{x}) = 600 + 200\mathbf{x}$

e) Los siguientes gráficos corresponden a las situaciones descritas en a) y en c). Identifiquen cuál corresponde a cada una. ¿En qué se diferencian? ¿Es cierto que en ambos gráficos se representa que la cantidad de agua que entra a la pileta es de 200 litros por minuto?





En el problema 1 e) se espera que los estudiantes reconozcan que los gráficos se diferencian en que el primero representa que el proceso comienza con la pileta vacía (0 litros) y que el segundo comienza con 600 litros.

De a dos 2

Para resolver

Para resolver

Gonzalo y Julieta son empleados del mismo comercio de calzado, pero su sueldo es calculado de manera distinta. Gonzalo cobra un sueldo de $30.000 fijos, al que se le agregan $100 por cada par de zapatos vendido. Julieta, en cambio, cobra solamente $200 por cada par que se vende en el negocio.

a) Si en el mes de septiembre se vendieron 200 pares en total, ¿cuál fue el sueldo de cada uno?

b) ¿Es cierto que si en octubre se vendieran 400 pares ambos cobrarían el doble de sueldo que en el mes anterior?

c) Para cada uno de los empleados, ¿cuál o cuáles de estas fórmulas permiten calcular su sueldo en función de la cantidad de pares de calzado que se vendan en el negocio?

$f(\mathbf{x}) = 100\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 30.000 + 100\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 30.000 + 200\mathbf{x}$ | $f(\mathbf{x}) = 200\mathbf{x}$

De a dos 3

El tanque de un auto tiene capacidad para 60 litros de nafta. Cuando le quedan 15 litros de nafta, su dueño entra a una estación de servicio para llenarlo.

a) Si el surtidor vierte 5 litros cada 10 segundos, ¿cuántos litros tendrá el tanque a los 20 segundos?

b) ¿Cuánto tardará en llenarse el tanque?

c) Escriban la fórmula de una función que represente la cantidad de nafta que ingresa al tanque (en litros) en función del tiempo (en segundos), desde que comenzó a llenarse.

d) Consideren ahora otra función que represente la cantidad de nafta que hay en el tanque en función del tiempo, desde que comenzó a llenarse. ¿Cómo podrían escribir la fórmula de esta nueva función?

Para hacer En la carpeta

Para comprobar

GeoGebra

e) Realicen un gráfico para cada una de las funciones.

INVENTAR PROBLEMAS ENTRE TODOS

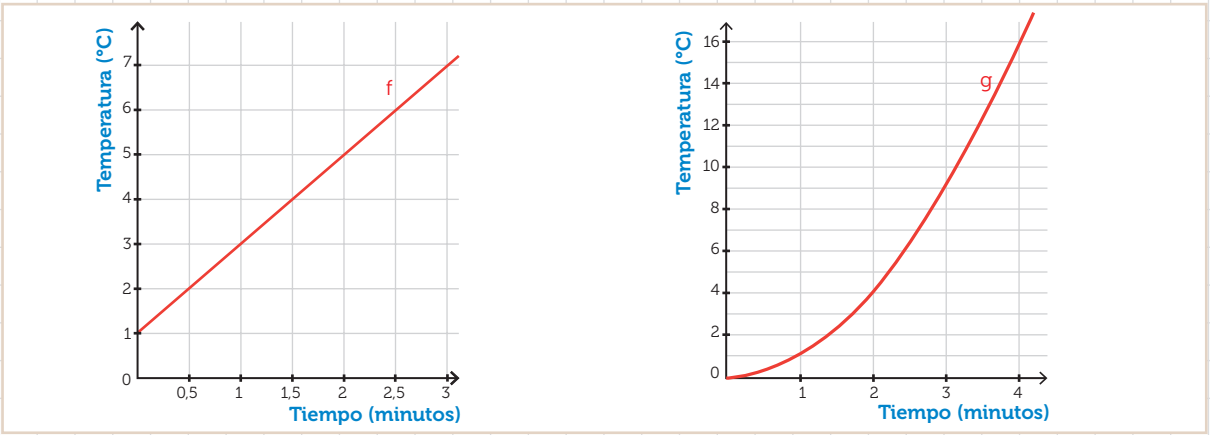
- Inventen una situación que se pueda representar con la fórmula $f(\mathbf{x}) = 10\mathbf{x} + 20$.
- Armen un problema inventando preguntas sobre la situación y resuélvanlo.

En estas páginas se propone el estudio de situaciones de variación uniforme a partir de distintos registros de representación: gráficos, tablas y fórmulas. El objetivo es que los alumnos logren identificar qué características de cada uno de estos registros se corresponden con situaciones de variación uniforme. Por ejemplo, la forma de un gráfico (recto o curvo), la estructura de una fórmula, la variación de los valores de las variables en una tabla, etc.

Situaciones de variación uniforme

De a dos

1 Se realizaron dos experimentos, cada uno con una sustancia distinta. A continuación se muestran los gráficos de las funciones *f* y *g*, que representan la temperatura de las sustancias A y B, respectivamente, en función del tiempo.



a) Para cada una de las funciones, confeccionen una tabla con 5 valores de tiempo y de temperatura relacionados.

En el problema 1 se trata de analizar dos variaciones, una de las cuales es uniforme. Este problema podrá ser un insumo para la lectura del siguiente apartado "Para leer entre todos".

b) ¿Es cierto que la temperatura de la sustancia A aumenta siempre la misma cantidad por cada minuto que transcurre? Si creés que sí, indicá la cantidad de grados que aumenta por minuto. Si creés que no, explicá por qué.

c) ¿Y la temperatura de la sustancia B?

PARA LEER ENTRE TODOS

En algunas relaciones entre variables ocurre que a variaciones iguales de una variable corresponden variaciones iguales de la otra. En estos casos se dice que la relación es de **variación uniforme**.

De a dos

2 Un recipiente contiene agua que se encuentra a una temperatura de –20 °C. A partir de un momento comienza a ganar temperatura a un ritmo constante de 8 °C por minuto, hasta el instante en que se descongela.

a) ¿Cuánto tarda en descongelarse el agua del recipiente?

b) Escriban una fórmula que permita calcular la temperatura del agua en función del tiempo. ¿Cómo se podría utilizar la fórmula para verificar la respuesta del punto anterior?

En el problema 2 a) el agua tarda 2 minutos y medio en llegar a 0 °C, un valor que no es entero. Para contestar los estudiantes deberán apoyarse en la variación uniforme y concluir que la temperatura asciende 4 °C por cada medio minuto que transcurre.

c) Representen gráficamente la temperatura del agua en función del tiempo e indiquen en el gráfico el punto que representa el instante en el que el agua está a 0 °C.

Para hacer En la carpeta

Para comprobar GeoGebra

Para realizar el gráfico del problema 2 c) los estudiantes podrían comenzar marcando el punto (0; –20). Luego, a partir de la variación de la temperatura, podrían continuar marcando puntos sucesivos de manera creciente, que estuviesen a 8 unidades de distancia en el eje y, y a una unidad de distancia en el eje x. También podrían realizar una tabla y marcar los puntos a partir de los valores obtenidos.

De a dos **3** Una empresa de minifletes utiliza la fórmula $f(\mathbf{x}) = 300 + 150\mathbf{x}$ para calcular el precio de su servicio en función de la cantidad de kilómetros que tenga que recorrer. Para resolver el problema 3 a) los estudiantes podrían hallar los precios de distintos recorridos de un kilómetro de diferencia y luego analizar su variación. También podrían analizar la fórmula y reconocer que 300 es un valor fijo al que se le agrega "x veces" 150. Así, por cada una unidad que se incrementa x, el resultado aumentará en 150.

a) ¿Es cierto que, por cada kilómetro que recorre, el precio del servicio aumenta $150?

b) ¿Cuánto deberá pagar Ramona si contrató el servicio de la empresa por un trayecto de 12 km hasta su casa? Algunos estudiantes podrían resolver el problema 3 c) hallando el costo del servicio para un recorrido de 15 km y calculando la diferencia con el resultado obtenido en el ítem b). Otros alumnos podrían responder que deberá pagar 3 · $150 = $450 por este tramo, apoyándose en lo establecido en el ítem a).

c) Luego de llegar a su domicilio, Ramona necesita que el miniflete siga el recorrido hasta la casa de su hija, que se encuentra a 3 km. La empresa le informó que le va a cobrar el servicio como si hubiera sido un solo trayecto. ¿Cuánto dinero más deberá pagar por este tramo?

d) Lucrecia, una amiga de Ramona, quiere contratar a la empresa para hacer un trayecto de 24 kilómetros. Dice que el costo va a ser de $4.200 porque el recorrido es el doble de la distancia del que contrató su amiga. ¿Están de acuerdo con Lucrecia? En el problema 3 d) se trata de poner en cuestión que la relación no es de proporcionalidad. Los estudiantes podrían fundamentar que la afirmación no es correcta utilizando la fórmula para calcular el precio. También podrían realizar un análisis de la fórmula y determinar que al duplicar el total del precio se estaría duplicando el costo fijo de $300, además del costo correspondiente a los kilómetros recorridos.

De a dos **4** Un automóvil realizó un viaje desplazándose a velocidad constante. Partió desde una ciudad ubicada en el kilómetro 600 de una ruta y llegó a otra ciudad que se halla en el kilómetro 0 de la misma ruta. Durante las primeras 2 horas de viaje el auto recorrió $\frac{1}{4}$ del total del trayecto.

a) Completen la siguiente tabla.

Tiempo (en horas)	0	2		6
Posición del auto sobre la ruta (en kilómetros)	600		300	

b) ¿Cuánto tardó el automóvil en hacer todo el recorrido? Al resolver el problema 4 algunos estudiantes podrían confundir la cantidad de kilómetros recorridos con la posición del automóvil sobre la ruta.

c) ¿Cuántos kilómetros recorrió el auto en las primeras dos horas del viaje? ¿Y en las últimas dos? Los estudiantes podrían resolver el problema 4 c) a partir de los valores de la tabla, identificando cuánto recorrió el auto en cada caso. También podrían afirmar que en las últimas dos horas de viaje recorrió lo mismo que en las primeras dos porque la velocidad era constante.

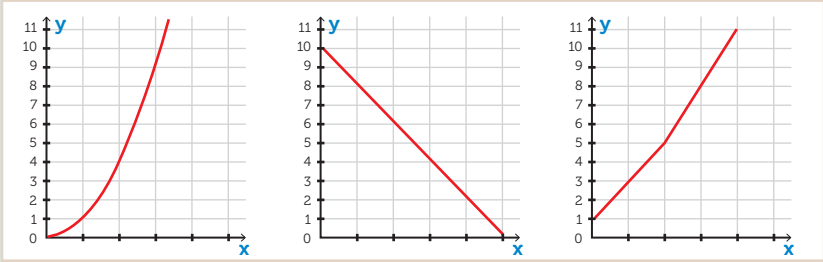
d) ¿Cuántos kilómetros recorrió el auto en una hora? ¿Y en una hora y media?

e) ¿Es cierto que se puede hallar la posición del auto sobre la ruta para cualquier momento durante el viaje? Si creen que sí, armen una fórmula para calcularla. Si creen que no, expliquen por qué.

ANALIZAR GRÁFICOS ENTRE TODOS

¿Cómo se pueden dar cuenta de si cada uno de estos tres gráficos de funciones corresponde o no a una situación de variación uniforme?

Para la resolución del problema planteado en la sección colectiva final el docente podrá recuperar junto a los estudiantes el análisis de las situaciones que se trabajaron en estas páginas, y realizarlo ahora a partir de representaciones gráficas. Se apunta a que el análisis se realice directamente sobre los gráficos a partir del estudio de las variaciones en el eje x y en el eje y.



En estas páginas se propone el estudio de las funciones lineales como un tipo particular de función. Se intenta establecer así una continuidad con el capítulo 5, retomando el análisis del dominio y de la imagen, del crecimiento y del decrecimiento, de si los puntos pertenecen o no a un gráfico, de la relación entre un gráfico y una fórmula, etc.

Funciones lineales I

1 Lucía contrató a un técnico para que arreglara el lavarropas. Le cobró un monto fijo de $500 por la visita, más un costo por la mano de obra que dependía de la cantidad de horas que durase la reparación.

Para resolver

Para resolver

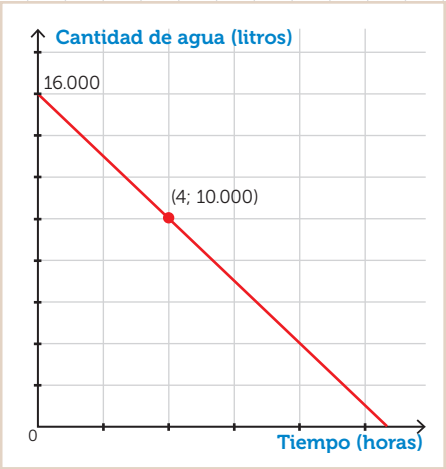
a) Si al finalizar el trabajo el técnico le cobró un importe total de $2.250, ¿cuánto le cobró por la mano de obra?

b) Si la reparación duró 5 horas, ¿cuál es el costo que cobra el técnico por cada hora trabajada?

c) Escribí una fórmula de la función que represente el importe total que debe cobrar el técnico en función de las horas trabajadas.

De a dos

2 Una pileta de natación que contiene 16.000 litros de agua fue conectada a una bomba que opera a un ritmo constante. El siguiente gráfico corresponde a la función que representa la cantidad de agua que contiene la pileta (medida en litros) en función del tiempo transcurrido desde el momento en que la bomba fue encendida (medido en horas).



a) ¿La pileta se vacía o se llena con el correr del tiempo? ¿Cuántos litros por hora entran o salen de ella?

El problema 2 demanda a los alumnos identificar la escala en función de los pares ordenados que se ofrecen como datos.

Para resolver

b) Hallen las coordenadas de tres puntos más que pertenezcan al gráfico y márquenlos.

Para resolver

c) Propongan una fórmula para la función.

d) Hallen el dominio y la imagen de la función.

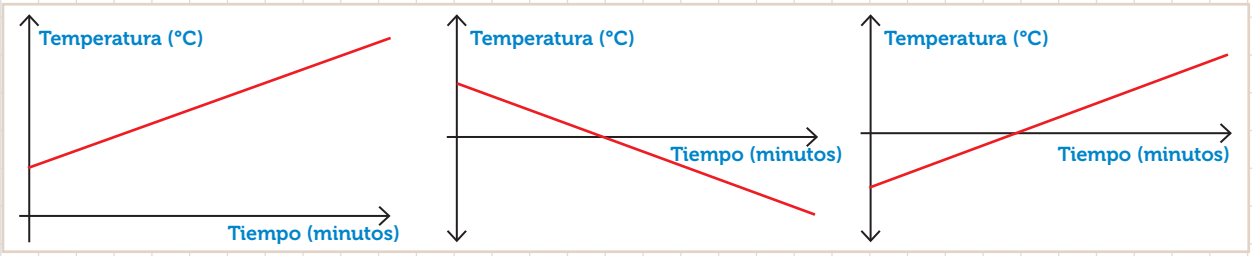
De a dos 3

a) Identifiquen a cuál de las situaciones puede corresponder cada uno de los gráficos.

i) Una sustancia que inicialmente se encuentra a −5 °C aumenta su temperatura en 2 °C por minuto a medida que pasa el tiempo.

ii) Una sustancia que al inicio se halla a 5 °C incrementa su temperatura en 2 °C por minuto a medida que pasa el tiempo.

iii) Una sustancia que inicialmente está a 5 °C disminuye su temperatura en 2 °C por minuto a medida que pasa el tiempo.



Para hacer en la carpeta

b) Para cada una de las situaciones, escriban una fórmula que la represente.

En el problema 3 c), los alumnos podrán comparar características de los gráficos: si son crecientes o decrecientes, si cortan al eje y en un valor positivo o negativo, la ubicación del punto donde cortan al eje x, etc.

GeoGebra

c) Ingresen en GeoGebra las fórmulas que escribieron en b) y comparen los gráficos que realiza el programa con los del enunciado.

PARA LEER ENTRE TODOS

Si una cantidad **y** se relaciona con otra cantidad **x** de manera tal que su variación es uniforme, se dice que esta relación es lineal. Este tipo de relaciones recibe el nombre de **función lineal**. Su fórmula suele expresarse como $f(\mathbf{x}) = \mathbf{mx} + \mathbf{b}$ (donde **m** y **b** son números), y su gráfico es una recta. Al número **m** (que multiplica a la variable **x**) se lo llama **pendiente de la recta**. La pendiente indica la variación del valor de $f(\mathbf{x})$ –es decir, de la variable **y**– cuando la cantidad **x** aumenta 1 unidad.

Si la pendiente de una función es un número positivo se dice que la función es **creciente**, dado que un aumento en 1 de la variable **x** implica un incremento en la otra variable $f(\mathbf{x})$. Si la pendiente es un número negativo, la función es **decreciente**, puesto que un aumento en 1 de la variable **x** implica una disminución de la variable $f(\mathbf{x})$. La pendiente también puede ser cero. Esto ocurre cuando la variable $f(\mathbf{x})$ mantiene siempre el mismo valor a pesar de la variación de la variable **x**. Estas funciones se llaman **constantes**.

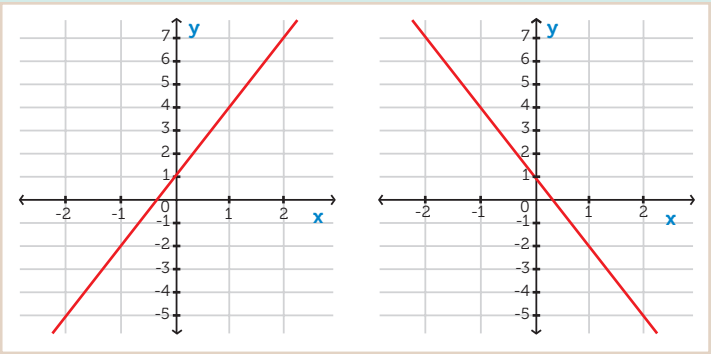
El número **b** se llama **ordenada al origen** e indica cuál es el valor de la función *f* cuando el valor de la variable independiente **x** es cero. En el gráfico, la ordenada al origen es el valor $f(\mathbf{x})$ en donde el gráfico corta al eje y. Para encontrarlo es necesario considerar $f(0)$.

EXPLICAR MANERAS DE RESOLVER ENTRE TODOS

¿Cómo harían para identificar a cuál de las fórmulas corresponde cada uno de los gráficos?

- $f(x) = -2x + 1$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = -3x + 1$
- $i(x) = 3x + 1$

En la resolución del problema colectivo final, se trata de analizar con los alumnos que no es suficiente atender al signo de la pendiente para determinar a cuál de las fórmulas corresponde cada uno. Será necesario que consideren el valor de la pendiente y lo relacionen con la variación de las variables.



Funciones lineales II

En estas páginas se propone el estudio de las funciones lineales de manera descontextualizada. Se avanza en la relación entre la fórmula y el gráfico, a partir de vincular la pendiente y la ordenada al origen con la inclinación de la recta y su intersección con el eje y, respectivamente. También se analizan y se definen las condiciones sobre las fórmulas para que dos rectas sean paralelas.

1 Una función lineal está representada por la fórmula $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} + 1$.

a) Completá la siguiente tabla con las coordenadas de puntos que pertenecen al gráfico de la función.

x	–1			1		2	
$f(\mathbf{x})$							

En el problema 1 a), el docente podría recuperar la noción de dominio trabajada en el capítulo 5 y analizar con todos los alumnos que en este caso no existe un contexto que restrinja los valores de la variable independiente.

Para hacer En la carpeta

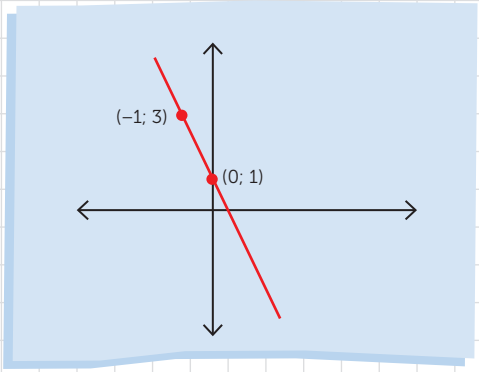
b) Representá gráficamente la función *f*.

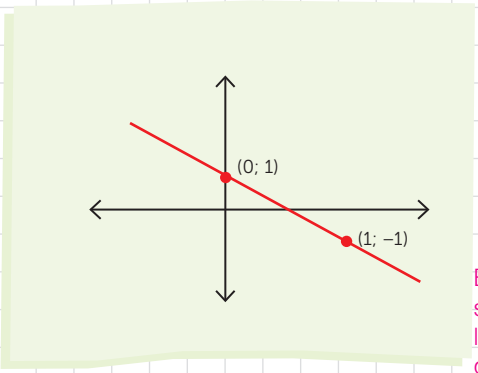
c) Escribí las coordenadas de 3 puntos del gráfico de *f* que hayan quedado fuera de la representación gráfica que realizaste en el punto anterior.

En el problema 1 c) se pone en cuestión la relación entre el gráfico de una función y una representación particular de aquel. El docente podrá hacer notar a los estudiantes que todas las representaciones gráficas que hicieron muestran un encuadre acotado del gráfico de la función, ya que existen infinitos puntos que pertenecen al gráfico que no se encuentran en las representaciones.

En grupos

2 Analía y Silvio hicieron estos dos gráficos para representar la misma función lineal.





En el problema 2 se presentan dos gráficos de la misma función lineal que "se ven" distintos.

La pregunta a) tiene el propósito de que los alumnos reflexionen acerca de que dos representaciones distintas pueden corresponder a la misma función lineal. Los estudiantes podrían identificar que las rectas contienen a los mismos puntos.

a) ¿Es posible que ambos gráficos sean correctos? A partir de establecer que los valores de y descienden 2 unidades por cada unidad que aumenta x, por ejemplo, podrían determinar que el punto (1; –1) pertenece a la primera recta aunque no esté marcado. También podrían hallar la fórmula a partir de cada una de las representaciones. Como conclusión los alumnos podrían identificar que se trata del mismo gráfico, pero representado con escalas distintas.

b) Si creen que ambos gráficos son correctos, hallen la fórmula de la función. Si no, hallen las fórmulas de las funciones que representan cada uno de los gráficos.

c) ¿Es cierto que alcanza con conocer las coordenadas de dos puntos cualesquiera de su gráfico para saber de qué función lineal se trata?

Los estudiantes podrían responder afirmativamente a la pregunta del problema 2 c) apoyándose en la variación uniforme de las funciones lineales, en su fórmula o en propiedades geométricas de la recta. En el primer caso, podrían decir que a partir de las coordenadas de dos puntos es posible hallar el valor de las coordenadas de cualquier otro punto por medio de la variación. En el segundo caso, podrían afirmar que a partir de las coordenadas de dos puntos es posible hallar la pendiente y la ordenada al origen, y armar la fórmula de la función. En el tercer caso, desde una interpretación geométrica, podrían reconocer que, dados dos puntos, existe una única recta que los contiene.

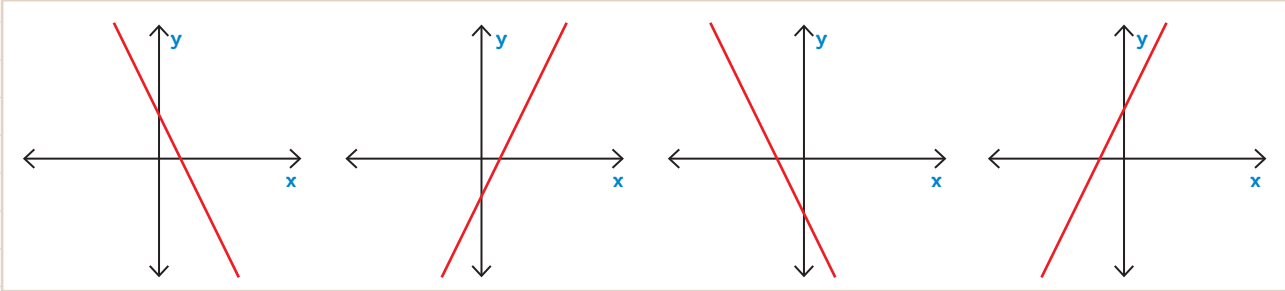
En el problema 3 es posible que algunos alumnos consideren que la función k corresponde al gráfico de la derecha, dado que la recta corta al eje x en un valor negativo. Será interesante generar instancias colectivas para discutir las razones por las cuales esto no es así y elaborar criterios para realizar este análisis.

En grupos **3** — Para hacer en la carpeta

A continuación se presentan fórmulas de funciones lineales.

$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + 1$ $\quad$ $g(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x} + 1$ $\quad$ $h(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 1$ $\quad$ $k(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x} - 1$

Identifiquen cuál de los gráficos puede corresponder a cada una de las funciones y expliquen cómo se dieron cuenta.



De a dos **4** — Para hacer en la carpeta — GeoGebra — Para comprobar

a) Completen las tablas de valores y realicen los gráficos de las funciones $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} + 1$ y $g(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} + 3$ en el mismo sistema de ejes cartesianos.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(\mathbf{x})$						
$g(\mathbf{x})$						

b) ¿Cuál es la distancia entre $f(-2)$ y $g(-2)$? ¿Y la distancia entre $f(3)$ y $g(3)$?

c) ¿Es cierto que la distancia entre $f(\mathbf{a})$ y $g(\mathbf{a})$ es la misma para cualquier valor de **a**?

d) ¿Es cierto que los gráficos de las funciones no se cruzan en ningún punto? Expliquen cómo pueden estar seguros.

En el problema 4 se apunta a reconocer que las rectas no se van a cruzar porque la distancia entre las imágenes correspondientes al mismo valor del dominio no varía. Podrán identificar que esta distancia es siempre 2 analizando ambas fórmulas.

De a dos **5** — Para resolver — GeoGebra

a) Tracen una recta creciente que pase por el origen. Analicen cómo cambia el valor de la pendiente cuando modifican la inclinación de la recta.

Si los alumnos usaran GeoGebra para resolver el problema 5, será conveniente que seleccionen la opción "Ecuación y = ax + b" de modo que puedan "leer" las sucesivas expresiones de las rectas, a medida que se varía su inclinación.

b) ¿Cambiaría el análisis que hicieron si la ordenada al origen fuera −5? ¿Y si fuera 6? ¿Y si fuera algún otro número?

PARA LEER ENTRE TODOS

Las **rectas paralelas** son aquellas que tienen la misma pendiente, es decir, la misma inclinación con respecto al eje **x**.

RESOLVER MÁS PROBLEMAS ENTRE TODOS

Dadas las siguientes funciones lineales, analicen cómo se podrá hacer para saber si sus gráficos se cortan o no en algún punto.

$f(x) = -2x + 1$ $\quad$ $g(x) = -1{,}5x - 5$ $\quad$ $h(x) = -2x - 1$ $\quad$ $k(x) = x - 1$

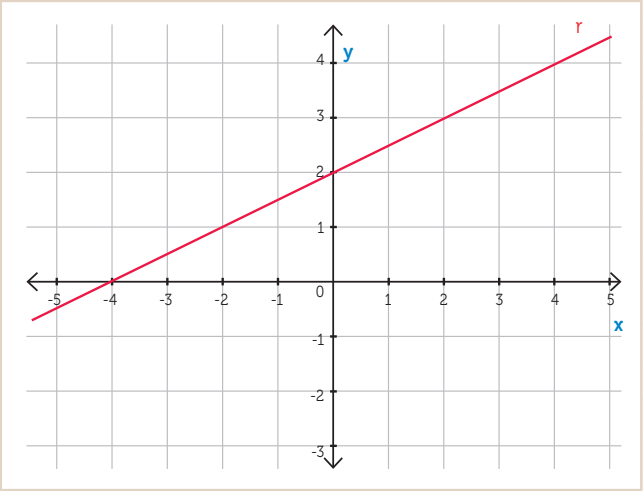
En el problema 1 b), el docente podría aprovechar esta situación para continuar el trabajo sobre rectas paralelas y ponerlo en relación con los conocimientos geométricos de los estudiantes.

Rectas perpendiculares

En grupos

1 La recta r representa el gráfico de la función lineal $f(\mathbf{x}) = 0{,}5\mathbf{x} + 2$.

Para usar



a) Tracen dos rectas perpendiculares a r, una cuya ordenada al origen sea 4 y otra cuya ordenada al origen sea −3.

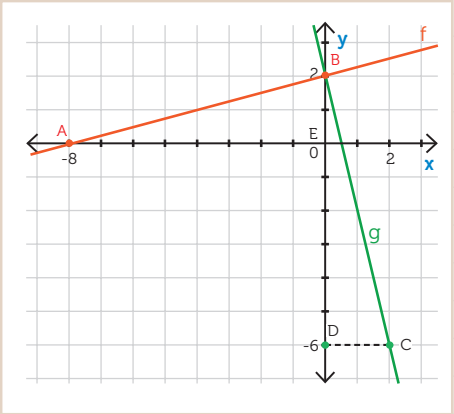
b) ¿Es cierto que las dos rectas que trazaron tienen la misma pendiente?

c) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Las pendientes de dos rectas perpendiculares entre sí son de signos opuestos.
- Si una recta tiene pendiente positiva, entonces cualquier recta de pendiente negativa será perpendicular a ella.
- Si una recta es creciente, cualquier recta perpendicular a ella es decreciente.

2 Estas rectas son los gráficos de las funciones $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\mathbf{x} + 2$ y $g(\mathbf{x}) = -4\mathbf{x} + 2$. Para fundamentar que ambas rectas son perpendiculares, Matías marcó los puntos A, B, C, D y E. Luego dijo que, como los triángulos AEB y BDC son congruentes, las rectas son perpendiculares.

Para hacer En la carpeta



a) Explicá por qué esos triángulos son congruentes.

b) ¿Cómo pudo haber usado Matías esta relación entre los triángulos para fundamentar que las rectas son perpendiculares?

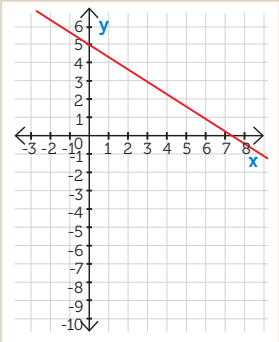
En el problema 2 se apunta a que los alumnos utilicen razonamientos geométricos que superen los argumentos empíricos.

PARA LEER ENTRE TODOS

Para que los gráficos de dos funciones lineales sean **rectas perpendiculares**, sus pendientes deben ser opuestas e inversas entre sí. Por ejemplo, los gráficos de $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} - 1$ y de $g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3}\mathbf{x} + 5$ son rectas perpendiculares porque el inverso de 3 es $\frac{1}{3}$ y, además, 3 y $-\frac{1}{3}$ tienen distintos signos. Dada una recta horizontal, cualquier recta vertical será perpendicular a ella.

RESOLVER MÁS PROBLEMAS ENTRE TODOS

- ¿Cómo harían para trazar el gráfico de una función lineal *g* que fuera perpendicular al gráfico de *f* y tuviera ordenada al origen −8?
- ¿Cómo se puede hacer para encontrar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas?



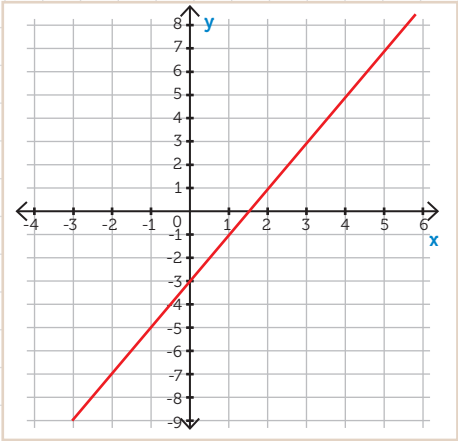
Al tratar con el segundo ítem, sería interesante volver a reflexionar acerca de los alcances de la percepción al momento de analizar gráficos de funciones.

En esta página se propone el estudio de ecuaciones del tipo mx + b = k, retomando las soluciones de ecuaciones y su relación con los gráficos de funciones. Para los casos de intersección entre rectas y de inecuaciones, solo se sugieren situaciones cuya resolución sea posible a partir de interpretar representaciones gráficas.

Ecuaciones lineales

De a dos

1 Este gráfico representa la función $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 3$.



Para hacer en la carpeta

a) En cada caso, hallen el valor de **x** que es solución de la ecuación.

$2\mathbf{x} - 3 = 1$ | $2\mathbf{x} - 3 = 7$ | $2\mathbf{x} - 3 = 61$

Para resolver el problema 1 a) los estudiantes podrían hallar el valor de x utilizando estrategias de cálculo mental o reconociendo en el gráfico de la función el punto cuya coordenada y es "el resultado" del cálculo. Las preguntas del ítem b) tienen la intención de que los alumnos reflexionen sobre esta relación entre el gráfico de la función y la ecuación.

b) ¿En cuál o cuáles de las ecuaciones es posible utilizar el gráfico de la función para encontrar las soluciones? ¿De qué manera?

c) Propongan algunos valores de **k** para los cuales la solución de la ecuación $2\mathbf{x} - 3 = \mathbf{k}$ sea negativa y otros para los cuales la solución sea positiva.

En grupos

2 Los siguientes son procedimientos correctos para encontrar el valor de **x**, que es solución de la ecuación $2\mathbf{x} - 14 = -9$. Compárenlos.

En el problema 2 se trata de explorar de forma colectiva algunas estrategias de resolución de ecuaciones de manera comparada. La comparación de procedimientos brinda la posibilidad de construir estrategias de control sobre el orden en el que se llevan a cabo los pasos de la resolución, interpretando el significado de cada uno y utilizando estrategias de cálculo mental.

Procedimiento 1

Si a 2x le resto 14, el resultado es −9. Eso significa que 2x tiene que dar 5, porque 5 − 14 = −9. Por lo tanto, x es la mitad de 5; es decir, 2,5.

Procedimiento 2

$2x - 14 = -9$

$2x = -9 + 14$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$

Procedimiento 3

$2x - 14 = -9$

$2x - 14 + 14 = -9 + 14$

$2x = 5$

$2x : 2 = 5 : 2$

$x = 2,5$

PARA LEER ENTRE TODOS

Cuando la fórmula de una función lineal $f(\mathbf{x}) = \mathbf{mx} + \mathbf{b}$ se iguala a un valor específico **k**, se forma una **ecuación en una variable**: $\mathbf{mx} + \mathbf{b} = \mathbf{k}$.

3 Resolvé las siguientes ecuaciones.

Para hacer en la carpeta · GeoGebra · Para comprobar

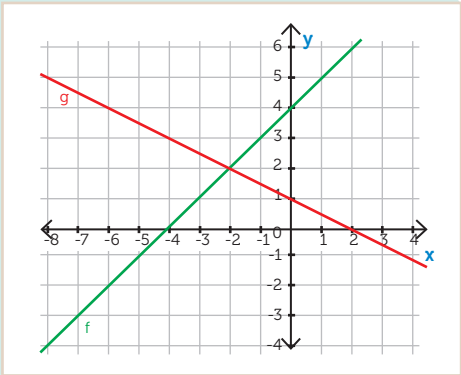
$4\mathbf{x} - 8 = 12$ | $3\mathbf{x} + 7 = -5$ | $3\mathbf{x} - 1 = 0$ | $2\mathbf{x} + 1 = 0$

ANALIZAR ENTRE TODOS

En el problema colectivo final no se espera que los alumnos resuelvan la ecuación y las inecuaciones por medio de transformaciones algebraicas, sino que recurran a los gráficos de las funciones como medio de resolución.

Las siguientes rectas representan las funciones lineales $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 4$ y $g(\mathbf{x}) = -0,5\mathbf{x} + 1$.

- Marquen sobre el gráfico el punto que sirve para hallar la solución de la ecuación $\mathbf{x} + 4 = -0,5\mathbf{x} + 1$. Luego determinen el valor de **x** que es solución de la ecuación.
- ¿Es cierto que para $\mathbf{x} = 0$ se cumple que $-0,5\mathbf{x} + 1 < \mathbf{x} + 4$? Marquen en el gráfico el punto que les podría servir para fundamentar su respuesta.
- Hallen, si fuera posible, un valor de **x** para el cual se cumpla que $\mathbf{x} + 4 < -0,5\mathbf{x} + 1$. ¿Es único?



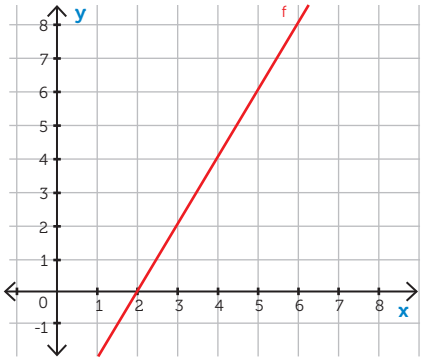
RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1 a) Relean los problemas de las páginas 118 y 119, en los que usaron relaciones de proporcionalidad. ¿En qué problemas y en qué partes de los problemas las usaron? ¿Qué resolvieron utilizando estas relaciones? Seleccionen dos problemas de otras páginas en los que se hayan aplicado estas relaciones y expliquen cómo fueron empleadas.

b) Para resolver algunos de los problemas de las páginas 122 y 123 tuvieron que determinar la variación de la variable dependiente para cada unidad que variaba la independiente. Identifiquen en qué problemas lo hicieron y cómo lo efectuaron en cada caso.

2 Aquí se muestra el gráfico de la función lineal $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 4$.

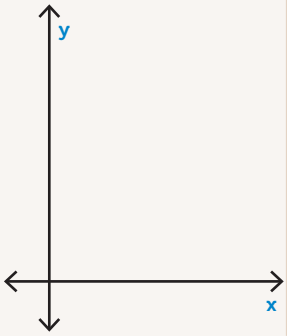


a) Hallen la solución de las ecuaciones:

- $2\mathbf{x} - 4 = 6$
- $2\mathbf{x} - 4 = -3$

b) ¿Cómo le explicarían a un compañero de qué manera se puede utilizar el gráfico de una función lineal para hallar la solución de una ecuación?

3 Revisen el capítulo y completen los siguientes cuadros, que relacionan distintas representaciones y elementos de una función lineal.

Situación	Gráfico	Tabla	Fórmula
Una sustancia que inicialmente se encuentra a 10 °C disminuye de manera uniforme su temperatura en 2 °C por minuto a medida que pasa el tiempo, hasta llegar a los 0 °C.		x | | | | $f(\mathbf{x})$ | | | | $f(\_\_\_\_) = 0$ $f(\frac{1}{2}) = \_\_\_\_$	**Dominio** **Imagen**

4 a) Encuentren un problema del capítulo en el que se deba realizar un gráfico a partir de una fórmula. Luego expliquen de manera general cómo se puede hacer esa tarea, usando ese caso como ejemplo.

b) Encuentren un problema del capítulo en el que se deba identificar o escribir la fórmula de una función lineal a partir de su gráfico. Luego expliquen de manera general cómo se puede hacer esa tarea, usando ese caso como ejemplo.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

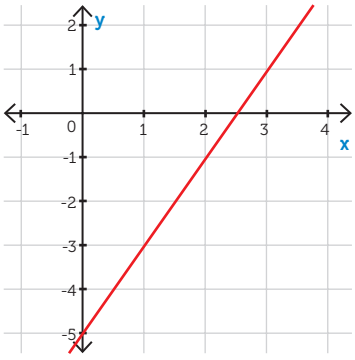
1 Un tanque tiene una capacidad de 1.100 litros. Se llena con agua mediante una bomba que opera a ritmo constante.

a) Completá la tabla que indica la cantidad de agua que hay en el tanque en función del tiempo transcurrido, desde que comenzó a operar la bomba.

Tiempo (minutos)	0	2	3		
Cantidad de agua que hay en el tanque (litros)	100	200		400	650

b) ¿Había agua en el tanque cuando comenzó a operar la bomba?
c) ¿Cuántos litros de agua ingresan al tanque por minuto?
d) Hallá la fórmula de una función que permita calcular la cantidad de agua que hay en el tanque en función del tiempo.
e) Determiná el dominio y la imagen de la función.
f) Representá gráficamente la función.

2 Este gráfico representa la función $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 5$.

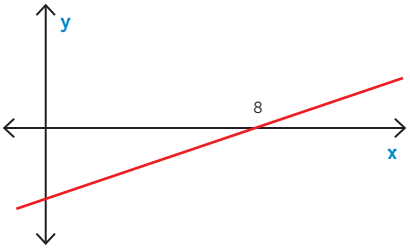


a) Marcá sobre el gráfico el punto que sirve para hallar la solución de la ecuación $2\mathbf{x} - 5 = 0$.
b) Marcá sobre el gráfico el punto que sirve para hallar la solución de la ecuación $2\mathbf{x} - 5 = 1$.
c) Resolvé las ecuaciones de los puntos anteriores.
d) Elegí un valor de **k** para que $\mathbf{x} = 1$ sea solución de la ecuación $2\mathbf{x} - 5 = \mathbf{k}$.

3 A continuación se presentan fórmulas de funciones lineales.

$f(\mathbf{x}) = 0{,}5\mathbf{x} + 8$ | $g(\mathbf{x}) = -0{,}5\mathbf{x} - 4$ | $h(\mathbf{x}) = 0{,}5\mathbf{x} - 6$ | $k(\mathbf{x}) = 0{,}5\mathbf{x} - 4$

a) Indicá cuál de las fórmulas puede corresponder al gráfico de la derecha y explicá qué tuviste en cuenta para identificarla.



b) Realizá los gráficos de las demás funciones. Luego marcá en ellos los puntos de intersección con el eje x y escribí sus coordenadas.

4 Matías contrató a un técnico para que arreglase su computadora. Le cobró un monto fijo de $360 por la visita, más un costo por la mano de obra que dependía de la cantidad de horas que durase la reparación.

a) Si al finalizar el trabajo el técnico le cobró un importe total de $1.000 y tardó 2 horas para la reparación, ¿cuál es el costo que cobra el técnico por cada hora trabajada?

b) Escribí una fórmula de la función que representa el importe total que debe cobrar el técnico en función de las horas trabajadas.

c) Marita pagó $2.280 por la reparación de su computadora portátil con el mismo técnico. ¿Cuánto tiempo le llevó al técnico la reparación?

5 De una función lineal, se sabe que el valor de su pendiente es 2 y que el punto (0; −3) pertenece a su gráfico.

a) Hallá una fórmula para la función lineal.

b) Representá gráficamente la función.

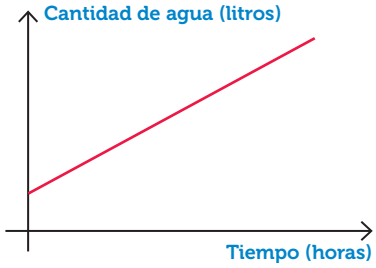
c) Determiná las coordenadas de un punto del gráfico que se encuentre en el tercer cuadrante.

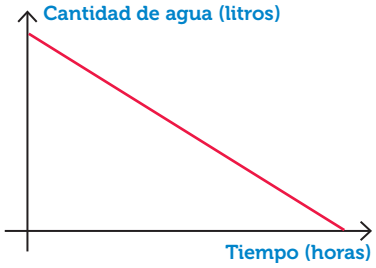
6 Se sabe que el gráfico de la función lineal *f* contiene a los puntos (−2; 1) y (0; 4) y que el gráfico de la función lineal *g* contiene a los puntos (2; 7) y (0; 4).
¿Es cierto que *f* y *g* son la misma función?

7 a) Identificá a cuál de las situaciones corresponde cada uno de los gráficos.

Una pileta de natación que contiene 15.000 litros de agua se vacía por medio de una bomba que opera a un ritmo constante de 200 litros por minuto.

Una pileta de natación que tiene una capacidad de 15.000 litros de agua se llena por medio de una bomba que opera a un ritmo constante de 200 litros por minuto.





b) Para cada una de las situaciones, escribí una fórmula que la represente.
c) Hallá el valor del tiempo en el que termina cada uno de los procesos.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Para renovar el agua de una pecera, se le quitan $\frac{3}{4}$ partes del total y quedan 250 litros. Para volver a llenarla se utiliza una manguera que introduce 75 litros de agua cada media hora.

a) Completá la tabla de la función que representa la cantidad de agua que hay en la pecera desde el momento en que se comienza a llenar.

Tiempo (en horas)	0	1		
Cantidad de agua que hay en la pecera (litros)			700	850

b) ¿Cuánto tiempo tarda en volver a llenarse la pecera?
c) Hallá una fórmula de la función.

2 Analizá si los gráficos de las siguientes funciones son perpendiculares o no.

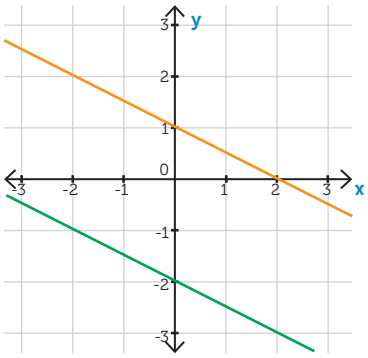
$f(\mathbf{x}) = -5\mathbf{x} - 3$ $\quad g(\mathbf{x}) = -5\mathbf{x} + \frac{1}{3}$ $\quad h(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\mathbf{x} + 2$ $\quad s(\mathbf{x}) = \frac{1}{5} + 5\mathbf{x}$

3 Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- La función $f(\mathbf{x}) = 6 - 2\mathbf{x}$ es creciente.
- La ecuación $-12 - 3\mathbf{x} = 0$ no tiene solución porque si a -12 se le resta algo, el resultado siempre va a ser negativo.

4 A continuación se muestran los gráficos de las funciones $f(\mathbf{x}) = -0{,}5\mathbf{x} - 2$ y $g(\mathbf{x}) = -0{,}5\mathbf{x} + 1$.

a) Indicá a qué gráfico corresponde cada fórmula.
b) Marcá en el gráfico los puntos que sirven para hallar las soluciones de las ecuaciones $-0{,}5\mathbf{x} + 1 = 2$ y $-0{,}5\mathbf{x} - 2 = -1$.
c) En cada caso, hallá el valor de **x** que es solución de la ecuación.
d) ¿Es cierto que no existe ningún valor de **x** para el cual $-0{,}5\mathbf{x} - 2 = -0{,}5\mathbf{x} + 1$? ¿Por qué?



5 La fórmula $f(\mathbf{x}) = 200 - 4\mathbf{x}$ representa el proceso de vaciado de un tanque. En dicha fórmula, la **x** representa el tiempo en minutos desde que comenzó el vaciado, y $f(\mathbf{x})$, la cantidad de agua que queda en el tanque expresada en litros.

a) ¿Qué cantidad de agua hay en el tanque cuando se inicia el proceso?
b) En un minuto, ¿qué cantidad de agua sale del tanque?
c) ¿En qué momento el tanque contiene 144 litros?

6 Un recipiente contiene una sustancia que está a 15 °C de temperatura. A partir de un momento comienza a perder temperatura a un ritmo constante de 4 °C por minuto, hasta el instante en que se congela a los −20 °C.

a) ¿Cuánto tarda en congelarse la sustancia?
b) Hallá una fórmula que permita calcular la temperatura de la sustancia en función del tiempo transcurrido desde que comienza a descender la temperatura.
c) Representá gráficamente la situación.

7 Sofía y Ernesto tomaron un remís para volver a su casa luego de un concierto. Primero fueron hasta la casa de Ernesto y después Sofía siguió sola en el auto hasta su domicilio. La remisería que contrataron utiliza la fórmula $f(\mathbf{x}) = 60 + 30\mathbf{x}$ para calcular el precio de su servicio en función de la cantidad de kilómetros que tenga que recorrer el auto.

a) Si Ernesto se hizo cargo del costo hasta su casa por un recorrido de 10 km, ¿cuánto debió pagar?
b) ¿Cuánto pagó Sofía por el resto del viaje si su casa está a 1,5 km de la de Ernesto?
c) ¿Cuánto aumenta el precio del servicio por cada kilómetro que recorre el remís?

8 Una función lineal está definida por la fórmula $f(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x} + 1$.

a) Escribí las coordenadas de 5 puntos que pertenezcan al gráfico de la función.
b) Representá gráficamente la función.
c) Escribí los pares ordenados que representan los puntos en los que la recta corta a los ejes.
d) ¿Existe algún punto que pertenezca al gráfico de la función y que se encuentre en el primer cuadrante? Si creés que sí, escribí sus coordenadas. Si creés que no, explicá por qué.

9 Completá la siguiente tabla que relaciona el área de distintos cuadrados y la longitud de sus lados. ¿Es cierto que se trata de una relación de variación uniforme?

Lado (cm)	1	2	4		
Área (cm^2)				30,25	49

La intención de la primera pregunta es que los estudiantes puedan recordar que una forma de hallar áreas de rectángulos es multiplicando las longitudes de sus lados. En el contexto analizado, deberán reconocer los diferentes rectángulos que forman el campo de juego y sus dimensiones. Se trata de que puedan discutir acerca de la relación que existe entre los datos dados y el cálculo de las áreas, es decir, si esa información es suficiente para poder calcularlo o no.

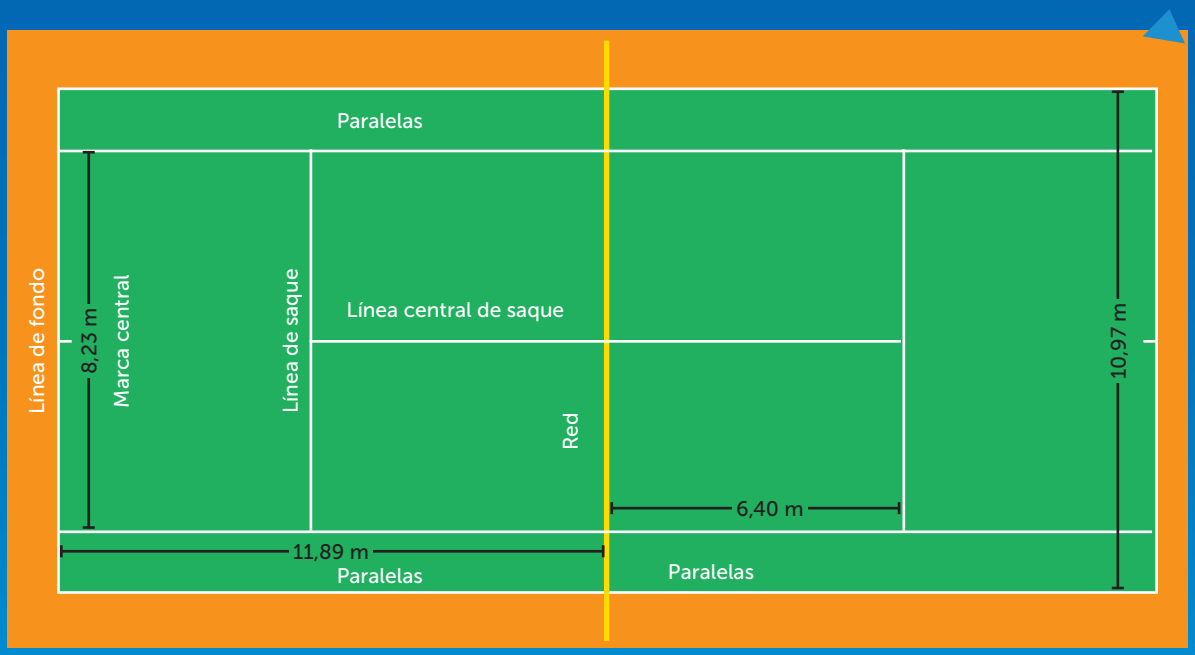
9 ÁREAS - TEOREMA DE PITÁGORAS

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

El tenis es un deporte que puede practicarse entre dos jugadores (single) o entre parejas (dobles).

Su campo de juego es una superficie rectangular, que puede ser de césped, de polvo de ladrillo o de cemento. Está dividida a la mitad por una red y pintada con marcas particulares para que se pueda jugar en singles o en dobles. Estas determinan diferentes sectores rectangulares iguales, a cada lado de la red.

Todas las canchas de tenis tienen las mismas dimensiones.



PARA PENSAR ENTRE TODOS

Al momento de discutir en torno a la segunda pregunta también pueden surgir diferentes estrategias: calcular el área del sector de paralelas directamente; calcular el área total de la cancha y restarle el área del sector de singles; calcular el área de paralelas en una mitad de la cancha y multiplicarla por 2, etc. Una vez realizada esta segunda actividad, puede ser interesante formular otro tipo de preguntas a los estudiantes; por ejemplo: ¿Es cierto que el área de la cancha se duplicó con respecto a la de singles?

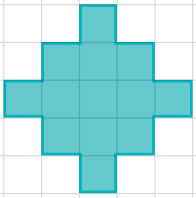
- ¿Creen que, con los datos presentados en las imágenes, es posible determinar las áreas de cada sector de la cancha? ¿Por qué?
- Cuando se juega dobles, se incluyen en el campo de juego los sectores de paralelas (que no son considerados cuando se juega singles). ¿Cuánto aumenta el área del campo de juego con esta inclusión?

Área de figuras I

Los problemas incluidos en estas páginas posibilitan trabajar en torno a diferentes unidades de medida de áreas. En este sentido, se propondrán algunas no convencionales y otras más conocidas, como el cm². Además, los últimos problemas permiten recuperar las fórmulas para calcular el área de triángulos y rectángulos estudiadas en años anteriores, y ponerlas en relación.

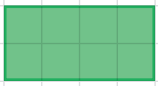
De a dos

1 ¿Cuánto mide el área de la figura usando como unidad de medida cada una de estas unidades?



a)  _____

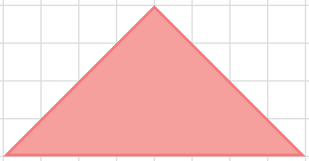
b)  _____

c)  _____

En el problema 1 se trata de recuperar con los estudiantes la idea de medir el área de una figura utilizando unidades no convencionales, en términos de "cuántas veces entra en la figura" la unidad elegida. Para ello, podrían trazar algunos cuadraditos sobre el dibujo y deducir cuántos entrarán en total. Es posible que los alumnos tomen como base la unidad de medida cuadrada y analicen la relación con el resto de las unidades, por ejemplo: "el triángulo es la mitad del cuadrado, y por lo tanto, el área medida con ella será el doble", "el rectángulo es el doble del cuadrado y, por lo tanto, el área medida con ella será la mitad".

2 Dibujá una figura que tenga la misma área que este triángulo. ¿Es posible construir otra distinta?

Graduada Para usar



El problema 2 posibilita analizar que hay diferentes figuras que tienen la misma área. Una opción es que los alumnos imaginen recortar la figura en dos, reacomodar esas partes y reconstruir la nueva, argumentando que, al no agregar ni quitar nada, el área es la misma. En el caso de que la nueva figura que armen fuera un rectángulo, se podría analizar la igualdad de las áreas en términos de sus fórmulas o mediante el uso conveniente de unidades de medida, como un cuadradito.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

Para medir el **área de una figura** se debe elegir una unidad de medida y establecer cuántas veces entra esa unidad en su superficie.
El área de una superficie se puede medir con diferentes unidades. Una muy utilizada es el **centímetro cuadrado** (**cm²**), que equivale a la medida del área de un cuadrado de 1 centímetro de lado.

1 cm

De a dos

3 En estos rectángulos, los puntos J, D y P están sobre uno de sus lados. Decidan, sin medir, si el área del triángulo sombreado es mayor, menor o igual que el área blanca. Expliquen cómo se dieron cuenta.

Graduada Para usar

Para resolver

GeoGebra

En el problema 3, los estudiantes podrán trazar rectas paralelas a los lados, que pasen por los puntos indicados, de forma tal que el rectángulo quede dividido en dos rectángulos cuyas diagonales sean los lados del triángulo sombreado. Recuperando lo trabajado en capítulos anteriores acerca de que

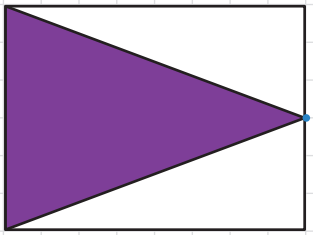


Figura 1

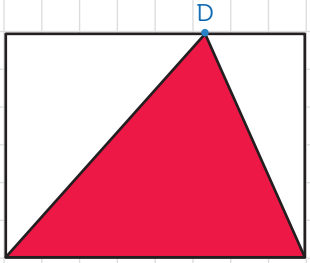


Figura 2

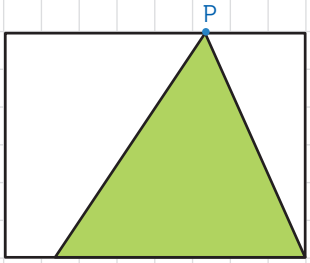


Figura 3

un rectángulo queda dividido en dos triángulos congruentes mediante una de sus diagonales, podrán concluir que en las figuras 1 y 2, los triángulos tienen igual área que el sector blanco; y en la figura 3, menor. Puede ser interesante utilizar GeoGebra, ubicando un punto móvil sobre un lado de un rectángulo y midiendo las áreas de las figuras que se desea comparar, para visualizar que los desplazamientos no modifican el área de los triángulos. Este trabajo posibilita que los estudiantes puedan ir formulando conjeturas con respecto a la pregunta planteada.

De a dos

4 a) ¿Cuál de estas figuras tiene mayor área? ¿Cómo se dieron cuenta?

Para hacer en la carpeta

Graduada Para usar

Para resolver el problema 4 a) los estudiantes podrían utilizar diferentes estrategias. Es posible que realicen la comparación a través de descomposiciones o rearmados de las figuras. También podrían recuperar lo trabajado en el problema anterior: elegir una unidad de medida conveniente y medir el área de cada figura. En este caso será importante discutir que, para poder comparar las áreas, la unidad de medida considerada para cada figura debe ser la misma. Si algunos alumnos midieran lados y alturas de las figuras para usar fórmulas, será una buena oportunidad para establecer vínculos entre dichas fórmulas y las otras estrategias aplicadas.

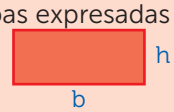
b) Averigüen el área de cada figura, medida en cm^2.

El ítem b) del problema 4 tiene la intención de centrar la atención en los cm^2. Puede ser enriquecedor relacionarlo con el "Para recordar entre todos" de la página anterior.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

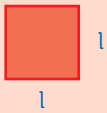
Para calcular el área de un rectángulo se puede multiplicar la medida de su base por la medida de su altura, ambas expresadas en la misma unidad de medida.

Área del rectángulo = b · h



Como el cuadrado es un tipo de rectángulo, con base y altura congruentes, se puede calcular su área mediante la fórmula:

Área del cuadrado = l · l = l^2



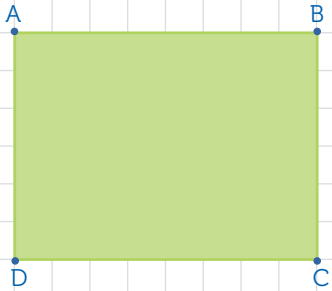
De a dos

5 El cuadrilátero ABCD es un rectángulo que tiene un lado de 4 cm y otro de 3 cm.

Para hacer en la carpeta

a) ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?

Para resolver el ítem c) del problema 5, los estudiantes podrán recuperar lo trabajado en el problema 3. De esta manera, habrá infinitas posiciones del punto K y todas ellas determinarán un triángulo DKC cuya área es la mitad de la del rectángulo ABCD.



b) Dibujen el triángulo ACD, ¿cuál es su área?

Para comprobar

GeoGebra

c) ¿Es cierto que, si se marca un punto K sobre cualquier lugar del lado AB, todos los triángulos DKC tienen la mitad del área del rectángulo ABCD?

Entre todos

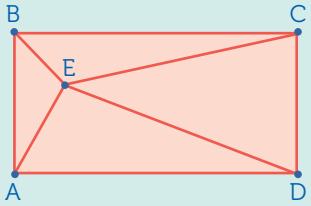
6 Encuentren una forma de explicar por qué, siempre que se quiera hallar el área de un triángulo, se puede considerar el área de un rectángulo que tenga como base un lado del triángulo y la misma altura que la correspondiente a ese lado.

Para hacer en la carpeta

En la actividad de la sección final colectiva el trazado de una paralela a los lados BC y AD, que pase por el punto E, podrá ser un aporte del docente. Con el uso de GeoGebra, el arrastre del punto E permitiría a los estudiantes identificar la variación de las áreas de los triángulos. En particular, podrá identificarse que la suma de las áreas correspondientes a los triángulos BCE y AED no cambia y es siempre la mitad del área del rectángulo.

COMPARAR ÁREAS ENTRE TODOS

- Si se dibuja un rectángulo ABCD, se marca un punto E en su interior y se trazan los segmentos que unen dicho punto con los vértices del rectángulo, quedan determinados 4 triángulos.



Sin medir, contesten las siguientes preguntas.

- ¿Es cierto que la suma de las áreas de los triángulos BCE y AED es la mitad del área del rectángulo?
- ¿Cambiaría la respuesta a la pregunta anterior si E estuviera en otro lugar dentro del rectángulo?

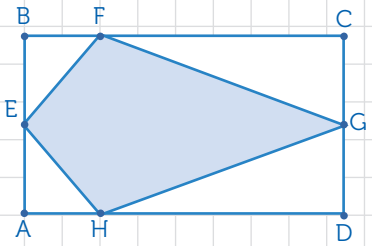
En estas páginas se incluyen problemas que involucran hallar el área de paralelogramos no rectángulos, rombos no cuadrados, romboides y trapecios. Se busca ir avanzando en la elaboración de fórmulas para el cálculo de áreas a partir de diferentes elementos como diagonales, alturas y lados.

Áreas de figuras II

El problema 1 posibilita recuperar la caracterización de los cuadriláteros a partir de sus diagonales. Además, permite poner en juego las estrategias de cálculo de áreas y concluir que siempre que se consideren romboides o rombos con las mismas diagonales, sus áreas serán iguales. Puede ser interesante la utilización de GeoGebra construyendo una figura análoga con el segmento FH móvil para comparar los valores de las áreas.

De a dos

1 Sobre los lados del rectángulo ABCD se marcaron los vértices del cuadrilátero EFGH, cuyas diagonales son paralelas a los lados del rectángulo. Además, los puntos E y G son puntos medios de los lados AB y CD, respectivamente.



Para comprobar

Para comprobar

GeoGebra

Para hacer en la carpeta

a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es EFGH?

b) Si el área del rectángulo ABCD es 40 cm², ¿cuál es el área del cuadrilátero EFGH?

c) ¿Cambian las respuestas de los ítems anteriores si F y H son puntos medios de los lados BC y AD respectivamente? ¿Por qué?

d) ¿Existen otras posiciones en las que se pueda ubicar la diagonal FH, de forma tal que siga siendo perpendicular a $\overline{EG}$ y que el área del cuadrilátero EFGH sea igual a la del ítem **b)**?

2 Calculá el área de las siguientes figuras:

- Romboide con diagonales de 6 cm y 4 cm.
- Romboide con diagonales de 5 cm y 3 cm.
- Rombo con diagonales de 5 cm y 3 cm.

Para hacer en la carpeta

Entre todos

3 **a)** ¿Cómo se pueden calcular las áreas de un romboide y de un rombo, si se conocen las longitudes de sus diagonales?

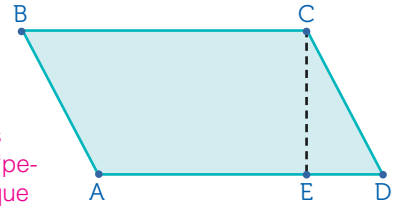
El ítem a) del problema 3 apunta a que los estudiantes expliciten sus estrategias, que pueden incluir el armado y el desarmado de figuras, la construcción de un rectángulo que las inscriba o bien un cálculo. Al finalizar la resolución del ítem b) puede ser enriquecedor que los estudiantes socialicen las fórmulas que elaboraron en un espacio colectivo, con el fin de ajustarlas, compararlas y analizar su equivalencia, entendiendo que no necesariamente todos elaborarán las mismas.

Para hacer en la carpeta

b) Elaboren fórmulas para calcular el área de dichas figuras, si sus diagonales son D y d.

De a dos

4 **a)** El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y $\overline{EC}$ es perpendicular a $\overline{AD}$. Sabiendo que $|\overline{AE}| = 3$ cm, $|\overline{ED}| = 1$ cm y $|\overline{EC}| = 3$ cm, calculen el área del paralelogramo.



En el ítem a) del problema 4, los estudiantes podrán "recortar" alguno de los triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura del paralelogramo y "pegarlo" del otro lado, para formar un rectángulo. El docente podrá proponer que analicen en conjunto las razones por las cuales el triángulo recortado "encaja" en el otro extremo del paralelogramo.

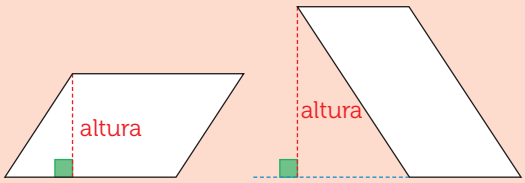
Para hacer en la carpeta

b) Encuentren una forma de explicar por qué, para hallar el área de un paralelogramo, se puede calcular el área de un rectángulo que tenga la misma base y la misma altura.

El ítem b) tiene la intención de explicitar esta estrategia a fin de dotar de sentido a la fórmula incluida en el texto "Para leer entre todos" de la página siguiente.

PARA RECORDAR ENTRE TODOS

En los paralelogramos, la **altura** es la longitud de un segmento que tiene como uno de sus extremos alguno de los vértices del paralelogramo y llega hasta el lado opuesto (o a su prolongación) de manera perpendicular.

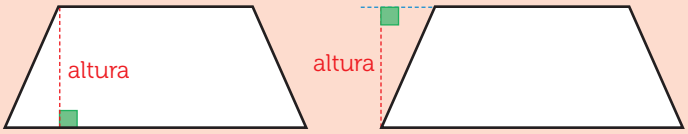


5 En la siguiente figura, el cuadrilátero EFGH es un trapecio isósceles y $\overline{AF}$ es su altura. Sabiendo que $|\overline{EH}| = 10$ cm, $|\overline{FG}| = 6$ cm y $|\overline{AF}| = 3$ cm, calculá el área del trapecio.

Para hacer en la carpeta

PARA LEER ENTRE TODOS

En los trapecios, la **altura** es la longitud de un segmento perpendicular a sus bases, que tiene un extremo sobre cada una de ellas o sobre sus prolongaciones.



Para el problema 5, al igual que en el 4, el docente podrá proponer que los alumnos justifiquen "el encaje" de los triángulos apelando a la congruencia y a las propiedades de ángulos entre paralelas.

Entre todos

6 Analicen y discutan esta explicación.

El problema 6 propone a los estudiantes que analicen una técnica particular para el cálculo de áreas de trapecios, con la intención de dotar de sentido a la fórmula incluida en el apartado "Para recordar entre todos". Si bien la fórmula para el cálculo del área puede usarse para cualquier tipo de trapecio, la justificación solo sirve para el caso de trapecios isósceles. Si el docente lo considera conveniente, puede proponer un análisis más general o incluir otros tipos de trapecios.

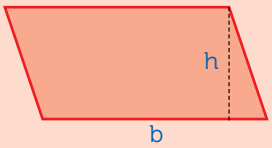
Para hacer en la carpeta

Para calcular el área de un trapecio isósceles de bases **a** y **b**, y altura **c**, se pueden considerar dos trapecios iguales y formar con ellos un paralelogramo (ya que al ser ambos trapecios congruentes, los ángulos opuestos del nuevo cuadrilátero serán iguales), de esta manera:

El área de este paralelogramo se puede calcular así: $(a + b) \cdot c$.
Por lo tanto, el área del trapecio es $\frac{(a + b) \cdot c}{2}$.

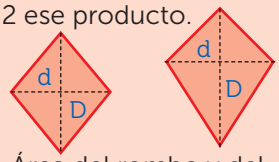
PARA RECORDAR ENTRE TODOS

- El **área de un paralelogramo** puede calcularse multiplicando las medidas de su base y de su altura.



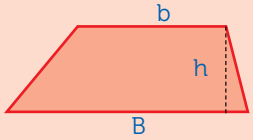
Área del paralelogramo = $\mathbf{b \cdot h}$

- El **área del rombo y del romboide** puede calcularse multiplicando las medidas de sus diagonales y dividiendo por 2 ese producto.



Área del rombo y del romboide = $\frac{\mathbf{D \cdot d}}{\mathbf{2}}$

- El **área de un trapecio** puede calcularse multiplicando la suma de la base mayor y la base menor por la altura, y dividiendo por 2 ese producto.

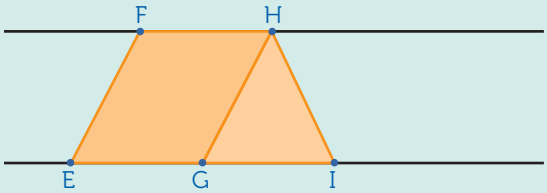


Área del trapecio = $\frac{(\mathbf{B + b}) \cdot \mathbf{h}}{\mathbf{2}}$

COMPARAR ÁREAS ENTRE TODOS

El problema colectivo final busca que los alumnos identifiquen la relación entre el área del triángulo y la del paralelogramo como uno de los modos de arribar a la respuesta.

En la figura, el cuadrilátero FHIE es un trapecio isósceles y las rectas son extensiones de sus bases. El punto G es punto medio del segmento EI y FHGE es un paralelogramo. ¿Qué relación pueden establecer entre el área del triángulo GHI y el área del trapecio FHIE? Expliquen sus respuestas.



Estas páginas proponen analizar variaciones en las áreas de las figuras estudiadas en páginas anteriores, al cambiar las longitudes de algunos de sus elementos (lados, alturas, diagonales, etc.). Este trabajo posibilitará introducir ciertas herramientas algebraicas para elaborar y justificar ideas y conclusiones generales.

Variación de áreas

1 ¿Es cierto que si las longitudes de los lados del rectángulo ABDC se reducen a la mitad, su área disminuye a la mitad?

El propósito del problema 1 es que los estudiantes puedan identificar que el área del nuevo rectángulo es un cuarto del área del rectángulo original. Podrán hacerlo apoyándose en mediciones y aplicando la fórmula, o bien dibujando un nuevo rectángulo contenido en este. El problema siguiente proporcionará nuevas herramientas de análisis para justificar esta afirmación desde un abordaje algebraico.

Para usar para resolver

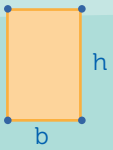
GeoGebra

Entre todos

2 Analicen el siguiente razonamiento, que intenta explicar qué sucede con el área de un rectángulo cuando se triplican las longitudes de sus lados.

Para hacer en la carpeta

El área del rectángulo puede calcularse usando la fórmula: **b** · **h**.
El área del nuevo rectángulo será: (3**b**) · (3**h**) = (3 · 3) · **b** · **h** = 9 · **b** · **h**.

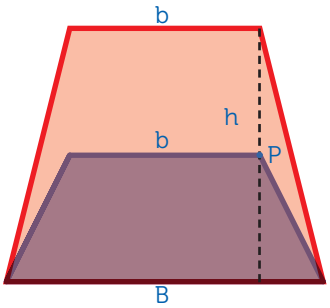


A partir del desarrollo anterior, decidan si el área del nuevo rectángulo se triplica o no. ¿Cómo pueden estar seguros?

El docente podrá acompañar la lectura e interpretación del desarrollo algebraico que aparece en el problema 2, que busca poner de relieve la potencia de este tipo de escritura a la hora de generalizar relaciones.

De a dos

3 En la figura están representados un trapecio isósceles rojo, que se forma al modificar solo la altura del trapecio violeta manteniendo las medidas de sus bases. El punto P es el punto medio de la altura **h** del trapecio rojo.



Graduada para usar

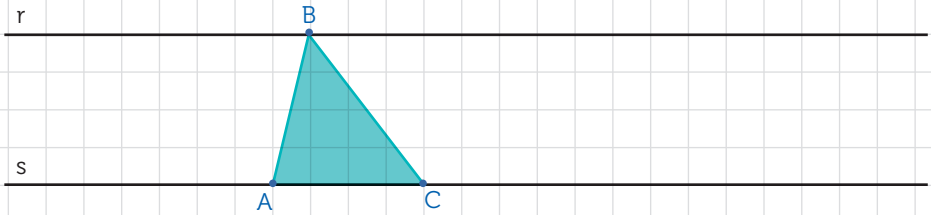
a) ¿Qué relación hay entre el área del trapecio rojo y el área del trapecio violeta?

b) Si el área del trapecio rojo se puede hallar haciendo $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$, indiquen cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten hallar el área del trapecio violeta.

$\frac{(B+b)\cdot h}{4}$ $\quad$ $(B+b)\cdot h$ $\quad$ $\frac{(B+b)}{2}\cdot\frac{h}{2}$

De a dos

4 En la siguiente figura, las rectas r y s son paralelas. El triángulo ABC tiene los vértices A y C sobre s, y B sobre r.



Para usar para resolver

GeoGebra

Para hacer en la carpeta

Si el punto C se desplaza sobre la recta s, se forman diferentes triángulos ABC.

a) ¿Cómo cambia el área de $\overset{\Delta}{ABC}$ si el punto C se ubica a una distancia del punto A que es el triple de la original?

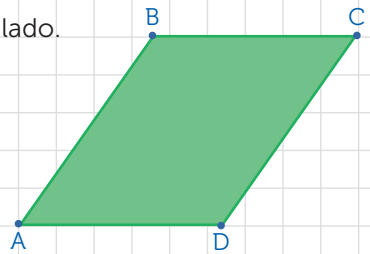
b) ¿Dónde se podría ubicar el punto C para que el área del triángulo sea la mitad de la del triángulo original?

Entre todos 5

a) Determinen cuáles de las siguientes modificaciones duplican el área del paralelogramo ABCD.

Para usar para resolver GeoGebra

- Duplicar la longitud del lado AD y la altura correspondiente a dicho lado.
- Duplicar la longitud del lado CD.
- Duplicar la longitud de la diagonal AC.
- Duplicar la altura del lado BC.
- Cuadruplicar la longitud del lado AB y reducir a la mitad la altura correspondiente a dicho lado.



Para hacer en la carpeta

b) Enuncien tres modificaciones que se podrían hacer sobre los elementos del paralelogramo ABCD para que su área disminuya a la mitad.

De a dos 6

a) Construyan una figura a partir del siguiente instructivo.

Para usar para resolver GeoGebra

- Tracen un segmento AC y marquen su punto medio. Llámenlo M.
- Tracen una recta perpendicular al segmento AC que pase por M.
- Marquen un punto B sobre esa recta perpendicular.
- Dibujen una circunferencia con centro en M, que pase por B.
- Llamen D al otro punto de intersección de la circunferencia con la recta.
- Dibujen el cuadrilátero ABCD.

Para hacer en la carpeta

En los problemas 5 y 6, los estudiantes podrán apelar en un primer momento a dibujos con medidas específicas para los elementos involucrados en las variaciones. También podrían partir del dibujo de referencia y ampliar o disminuir los elementos indicados, para completar los dibujos y compararlos con el original. Otra posibilidad sería que hiciesen cálculos apoyándose en las fórmulas, o que utilizasen la técnica estudiada en el problema 2 para justificar las variaciones propuestas.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD?

c) Si el radio de la circunferencia se duplica, ¿es cierto que el área del cuadrilátero ABCD también se duplica? ¿Por qué?

d) Y si el radio se reduce a la mitad, el área del cuadrilátero ABCD, ¿también disminuye a la mitad?

e) Expliquen cómo varía el área del cuadrilátero ABCD cuando cambia el radio de la circunferencia.

ANALIZAR LA VALIDEZ DE UNA AFIRMACIÓN ENTRE TODOS

Discutan entre todos si esta afirmación es verdadera o falsa y expliquen sus respuestas.

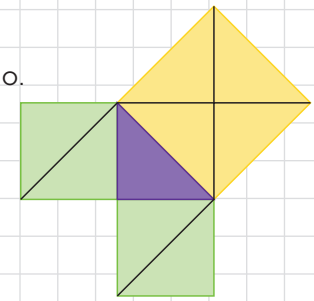
"Si una de las diagonales de un romboide se duplica y la otra se reduce a la mitad, su área no cambia".

Los problemas de estas páginas introducen el Teorema de Pitágoras y su justificación, apoyándose en la comparación de áreas. Posteriormente se propone avanzar hacia el cálculo de medidas de lados y áreas de figuras.

Teorema de Pitágoras

De a dos 1

Sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles de color violeta se dibujaron tres cuadrados, uno apoyado en cada lado, como muestra el dibujo.



El problema 1 propone una entrada al Teorema de Pitágoras mediante la comparación de áreas.

Para usar · Para resolver · GeoGebra

a) En la figura se trazaron una de las diagonales de cada cuadrado verde y las del cuadrado amarillo, y quedaron determinados ocho triángulos. ¿Es cierto que todos ellos son congruentes? Compárenlos con el triángulo violeta.

Para hacer en la carpeta

b) Expliquen por qué al sumar las áreas de los dos cuadrados verdes se obtiene el área del cuadrado amarillo.

En el ítem b), se trata de utilizar como unidad de medida de las áreas los triángulos considerados en el ítem a).

c) ¿Valdría esta misma relación entre las áreas si el triángulo rectángulo isósceles fuera otro? El objetivo del ítem c) es que los estudiantes puedan generalizar, para todos los triángulos rectángulos isósceles, lo estudiado en esta figura particular.

De a dos 2

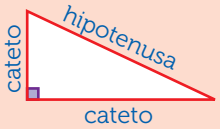
Construyan dos triángulos que no sean isósceles, de modo que en uno de ellos se verifique la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados, y en el otro no.

Para usar · Para resolver · GeoGebra · Para hacer en la carpeta

El objetivo del problema 2 es que los estudiantes realicen una actividad exploratoria, a partir de la construcción de diferentes triángulos y apelando a ciertas propiedades o bien al cálculo de áreas. El uso de GeoGebra puede colaborar en esta exploración.

PARA LEER ENTRE TODOS

En un triángulo rectángulo, los lados que determinan el ángulo recto se llaman **catetos**. El lado opuesto al ángulo de 90° se llama **hipotenusa**.



PARA LEER ENTRE TODOS

La siguiente explicación es una demostración que justifica que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo resulta igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Las figuras 1 y 2 son cuadrados congruentes. Están formadas por los cuadrados A, B y C y los triángulos amarillos que son congruentes entre sí, como se muestra en el dibujo siguiente:

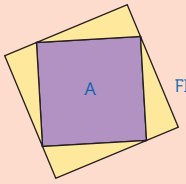


FIGURA 1

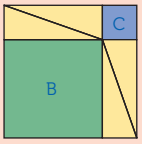
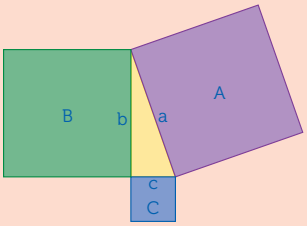


FIGURA 2



Al ser congruentes, las figuras 1 y 2 tienen la misma área. Además, cada una de ellas contiene cuatro triángulos amarillos congruentes entre sí. Por lo tanto, al quitar los triángulos de las figuras 1 y 2 se le está sacando a cada cuadrado la misma área. **Entonces, el área del cuadrado A debe ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados B y C.**

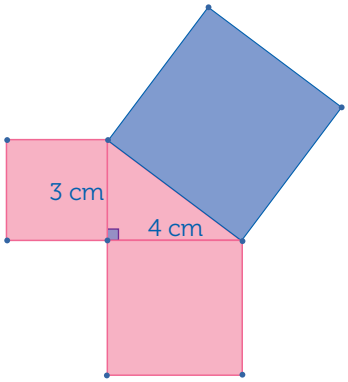
Al reordenar las figuras 1 y 2, es posible identificar que el cuadrado A tiene un lado sobre la hipotenusa del triángulo amarillo y los cuadrados B y C, sobre sus catetos.

Si **a** es la hipotenusa del triángulo amarillo, entonces el área del cuadrado A es $\mathbf{a^2}$. Si **b** y **c** son los catetos del triángulo amarillo, también resulta que el área de B es $\mathbf{b^2}$, y la de C, $\mathbf{c^2}$.

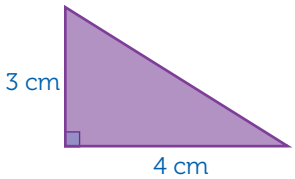
Entonces, vale que $\mathbf{a^2} = \mathbf{b^2} + \mathbf{c^2}$.

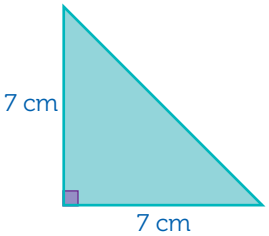
Y si en el triángulo se verifica que $\mathbf{a^2} = \mathbf{b^2} + \mathbf{c^2}$, entonces **a**, **b** y **c** son los lados de un triángulo rectángulo. Esta relación se conoce como **Teorema de Pitágoras**.

3 a) Este dibujo representa tres cuadrados apoyados sobre los lados de un triángulo rectángulo. Calculá, sin medir, el área del cuadrado azul.



b) Para cada uno de los triángulos rectángulos representados a continuación, calculá, sin medir, la medida de los lados que faltan.





De a dos

4 Calculen, sin medir, el área de un rombo que tiene 6 cm de lado y una diagonal de 8 cm.

Para hacer en la carpeta

De a dos

5 Un trapecio isósceles tiene una base menor de 14 cm, una altura de 6 cm y sus lados congruentes de 10 cm cada uno.

a) Averigüen la medida de la base mayor.

b) Calculen el área del trapecio.

Entre todos

6 Calculen el área de un cuadrado cuyas diagonales miden 9 cm, de dos maneras distintas.

Para resolver el problema colectivo final, los estudiantes podrán apelar a la propiedad estudiada en el capítulo 3: todos los triángulos equiláteros tienen sus alturas contenidas en las mediatrices correspondientes a los lados y, por lo tanto, los dividen en dos triángulos rectángulos congruentes. Para calcular el área necesitarán hallar dichas alturas por medio del Teorema de Pitágoras. Se podrá analizar la diferencia entre determinar las medidas usando el Teorema de Pitágoras y la medición efectiva.

RESOLVER UN PROBLEMA MÁS DIFÍCIL ENTRE TODOS

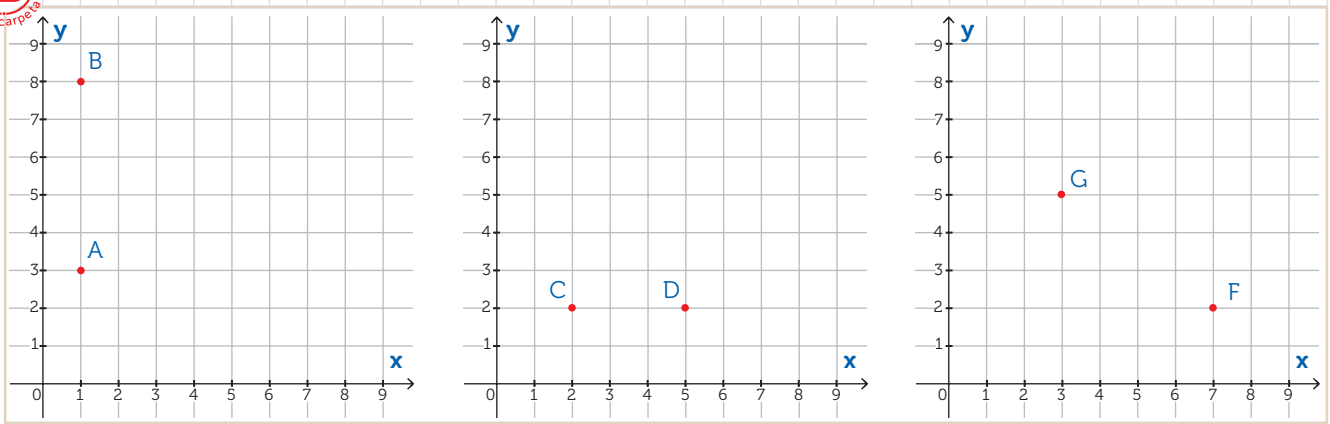
Calculen el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 cm.

En estas páginas se proponen actividades que involucran el Teorema de Pitágoras como herramienta para hallar distancias en el plano cartesiano (entre puntos y entre punto y recta). Se trata de que los estudiantes construyan estrategias y que se puedan apoyar en ellas para la elaboración de fórmulas de cálculo de dichas distancias.

Distancia entre dos puntos y distancia entre punto y recta

De a dos **1** Para hacer en la carpeta

Sin medir, calculen la distancia entre los puntos representados en cada uno de los siguientes sistemas de ejes cartesianos. Escriban los cálculos que realizaron.



Los estudiantes pueden resolver el problema 1 restando coordenadas en los primeros dos casos. En el tercer caso, pueden construir un triángulo rectángulo (cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos indicados) y usar el Teorema de Pitágoras para hallar su longitud.

De a dos **2** Para resolver Para resolver GeoGebra Para hacer en la carpeta

¿Cuál es la distancia entre los puntos indicados en cada caso?

a) P = (3; 5) y Q = (−2; 5)

b) R = (−3; 4) y S = (−3; 7)

c) T = (−1 ; 6) y U = (5; 3)

d) V = (108; 305) y W = (987; 42)

e) M = (−394; 987) y N = (200; −555)

Para resolver los primeros tres ítems del problema 2, los estudiantes pueden apelar a la construcción de los ejes cartesianos y así identificar las posiciones de cada uno de los puntos. Para los últimos dos ítems el docente puede sugerir la realización de esquemas, lo que posibilita cierto nivel de generalización de las estrategias aplicadas anteriormente. Será un punto de partida para la resolución del problema siguiente, en el que deberán explicitar la distancia entre dos puntos cualesquiera.

Entre todos **3** Para hacer en la carpeta

a) ¿Cómo se puede hacer para calcular, sin medir, la distancia entre dos puntos que tienen igual la primera coordenada? ¿Y si tienen igual la segunda coordenada?

b) ¿Cómo se puede hacer para calcular, sin medir, la distancia entre dos puntos cualesquiera?

Para la resolución del problema 3 b) no se espera que elaboren un recorrido formal ni completo, asunto que se explicita en el primer cartel de lectura colectiva de la página siguiente.

De a dos **4** Para resolver Para resolver GeoGebra Para hacer en la carpeta

¿Es cierto que estos puntos son vértices de un rombo ABCD?

A = (3; 3) B = (8; −2) C = (7; 5) D = (2; 10)

En el problema 4, los estudiantes deberán determinar si los vértices consecutivos se encuentran todos a la misma distancia, lo que implica recuperar las propiedades de los rombos trabajadas en el capítulo 6. Es probable que necesiten graficar los puntos en un sistema de ejes cartesianos para comenzar a conjeturar acerca de la validez o no de la afirmación. Si hacen esta construcción en GeoGebra, podrán utilizarla también como recurso de comprobación de los cálculos realizados.

De a dos **5** Para resolver Para resolver GeoGebra Para hacer en la carpeta

Decidan si los siguientes puntos pertenecen a la misma circunferencia de centro (5; 3).

P = (8; 5) Q = (7; 2)

En el problema 5, los estudiantes deberán determinar si la distancia de cada punto al centro de la circunferencia es la misma, para decidir si pertenecen o no a ella. Esta idea recupera la noción de circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro dado (centro), cuestión trabajada en el capítulo 3.

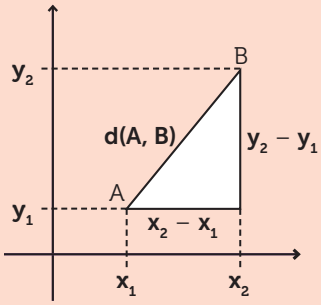
Se sugiere que el docente realice una lectura colectiva del texto “Para leer entre todos”, con la intención de colaborar en la comprensión de la escritura algebraica que se propone. Esta podrá apoyarse en ejemplos extraídos de las actividades anteriores. También podrá sugerir a los estudiantes que intervengan en dicho texto con anotaciones personales, ideas, ejemplos, etc.

PARA LEER ENTRE TODOS

Si **A** = (x_1; y_1) y **B** = (x_2; y_2), llamamos **d(A, B)** a la **distancia entre los puntos A y B**. Al formar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura, sus catetos medirán $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, mientras que su hipotenusa es **d(A, B)**.

Por el Teorema de Pitágoras resulta que: $(d(A, B))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, de donde se obtiene que para dos puntos cualesquiera:

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



De a dos **6** Para usar Para resolver Para resolver GeoGebra Para hacer en la carpeta

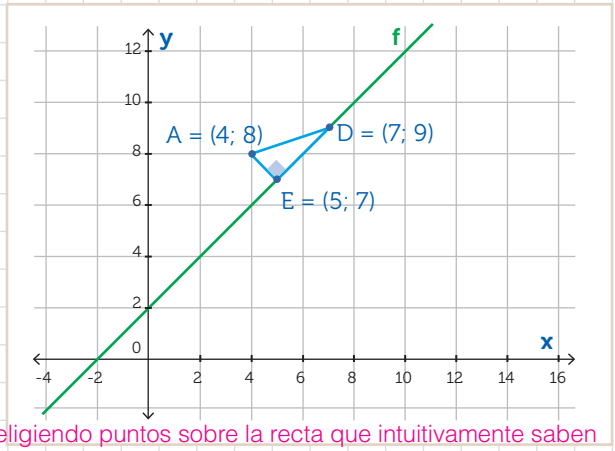
En la siguiente figura se muestran tres puntos A, E y D y la recta que representa la función lineal $f(x) = x + 2$.

a) Comprueben que los puntos E y D pertenecen al gráfico de la función *f*.

b) Si es posible, ubiquen un punto sobre el gráfico de *f* cuya distancia a A sea mayor que la distancia que hay entre A y D.

c) Si es posible, ubiquen ahora un punto sobre el gráfico de *f* cuya distancia a A sea menor que la distancia que hay entre A y E.

d) Si es posible, ubiquen un punto sobre el gráfico de *f* cuya distancia a A sea igual que la distancia que hay entre A y E.



Los estudiantes podrán resolver los problemas 6 b), c) y d) eligiendo puntos sobre la recta que intuitivamente saben que cumplen con las condiciones pedidas, y calculando el valor de su distancia al punto A.

El docente puede proponer en una instancia colectiva un debate que tenga como eje que, a medida que un punto se aleja de E, la distancia a A es cada vez mayor que la distancia entre A y E.

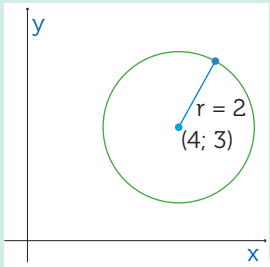
Entre todos **7**

Dada una recta r y un punto P en el plano, que no pertenezca a ella, expliquen cómo se puede hallar un punto en r, que esté a la menor distancia posible del punto P.

La intención del problema 7 es que los estudiantes expliciten que el punto sobre r que está a la menor distancia posible de P es la intersección entre r y la recta perpendicular a ella que pasa por P. Esta relación puede apoyarse en lo trabajado en el problema 6 y en el cartel "Para leer entre todos" de la página 45.

ELABORAR UNA EXPLICACIÓN ENTRE TODOS

Encuentren una forma de explicar por qué los puntos (**x**; **y**), que forman una circunferencia de centro (4; 3) y radio 2, siempre verifican la relación $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.



Este problema posibilita relacionar la distancia entre puntos y la noción de circunferencia como lugar geométrico de puntos que equidistan de otro (centro).

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1. Identifiquen en las páginas del capítulo qué problemas involucra cada uno de los siguientes conceptos:
   - Áreas de figuras.
   - Unidades de medida.
   - Variaciones de áreas.
   - Distancia entre puntos.
   - Distancia entre un punto y una recta.
   - Teorema de Pitágoras.

2. En las páginas 134 y 135 se utilizaron diferentes unidades para medir el área de una figura, entre las que se encuentra el cm^2. Investiguen qué otras unidades sirven para medir áreas.

3. Vuelvan a mirar las páginas 135, 136 y 137. Armen un machete que contenga las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos y los diferentes tipos de cuadriláteros. También pueden incluir ejemplos, anotaciones personales, diagramas y fórmulas que hayan elaborado ustedes.

4. Revisen las páginas 138 y 139, en las que estudiaron las variaciones en las áreas de diferentes figuras al cambiar en ellas distintos elementos. Elaboren tres conclusiones que se puedan sacar a propósito de estos problemas.

5. En las páginas 140 y 141 se introdujo el Teorema de Pitágoras. Investiguen aplicaciones de dicho teorema en diferentes contextos. Elijan alguno que les interese y armen un video contando lo que investigaron. Incluyan una situación específica que muestre su uso e identifiquen el triángulo rectángulo involucrado en ella.

6. Escriban un párrafo que contenga qué aprendieron a partir de la resolución de los problemas propuestos en las páginas 142 y 143. ¿Qué nuevos contenidos pueden identificar? ¿Cuáles de ellos se relacionan con lo trabajado en capítulos anteriores?

7. Elaboren un glosario de términos matemáticos trabajados en este capítulo. Por ejemplo, pueden incluir: unidad de medida, área de una figura, altura de una figura, hipotenusa, distancia entre dos puntos, distancia de un punto a una recta, etcétera.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR I

PARA HACER EN LA CARPETA

1. En una hoja cuadriculada, construí un rectángulo y un cuadrado que tengan un área de 16 cuadraditos cada uno. ¿Cuál sería su área si la unidad de medida fueran dos cuadraditos?

2. Dibujá dos triángulos distintos que tengan 32 cm^2 de área.

3. Dibujá un cuadrado ABCD de 3 cm de lado. Marcá un punto M sobre el lado CD. ¿Cuál es el área del triángulo BMA?

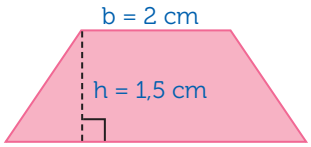
4. Un triángulo tiene un área de 30 cm^2 y uno de sus lados mide 4 cm. ¿Cuánto mide la altura correspondiente a ese lado?

5. Dibujá un paralelogramo que tenga la misma área que este rectángulo.

6. ¿Es posible encontrar dos romboides diferentes que tengan un área de 100 cm^2? Si tu respuesta es que no es posible, explicá por qué. Si tu respuesta es que sí es posible, indicá las medidas de sus diagonales.

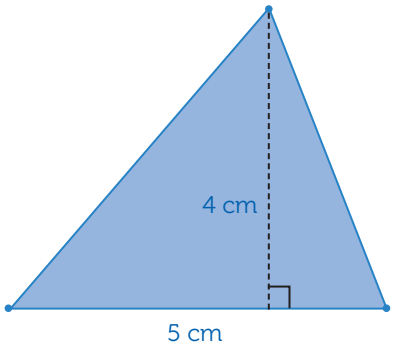
7. ¿Es cierto que el área de un rombo es igual a la suma del área de dos triángulos isósceles congruentes? Explicá tu respuesta.

8. Calculá el área de este trapecio isósceles sabiendo que su base mayor mide el doble que su base menor.

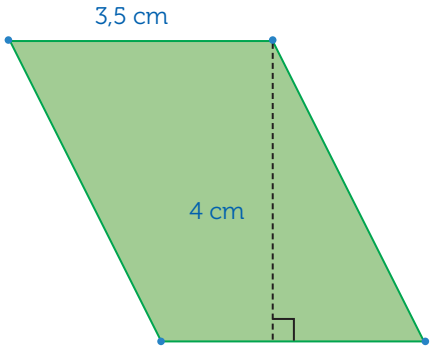


9. Encontrá una forma de explicar por qué cuando se duplican la base y la altura de un paralelogramo, su área de cuadruplica.

10 Dibujá un rectángulo que tenga la misma área que este triángulo.



11 Dibujá un rectángulo que tenga la misma área que este paralelogramo.

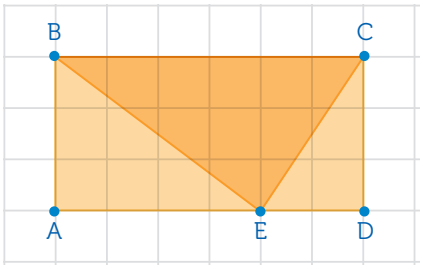


12 Sabiendo que el punto E está ubicado sobre el lado AD, decidí si las siguientes afirmaciones acerca de la figura son verdaderas o falsas:

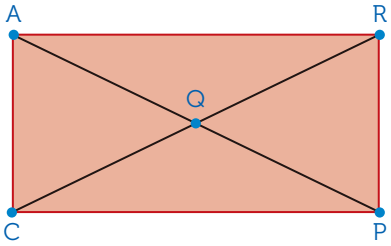
a) El área del triángulo ABE es igual a la suma de las áreas de los triángulos BCE y CDE.

b) El área del triángulo BCE es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABE y CDE.

c) El área del triángulo ABE es el doble que la del triángulo CDE.



13 Sabiendo que el cuadrilátero ARPC es un rectángulo y que Q es el punto de intersección de sus diagonales, explicá cómo se puede saber, sin medir, que las áreas de los cuatro triángulos ARQ, RPQ, PCQ y CAQ son iguales.



PROBLEMAS PARA ESTUDIAR II

PARA HACER EN LA CARPETA

1 ¿Es cierto que el área de un rombo no cambia si la longitud de una de sus diagonales se triplica y la otra se reduce a la tercera parte?

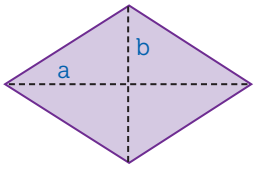
2 Para analizar la variación del área de un triángulo cuya base y altura se cuadruplicaron, Camila hizo esto:

Área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$

Área del nuevo triángulo: $\frac{4b \cdot 4h}{2} = \frac{(4 \cdot 4) \cdot b \cdot h}{2} = \frac{16 \cdot b \cdot h}{2} = 8 \cdot b \cdot h$

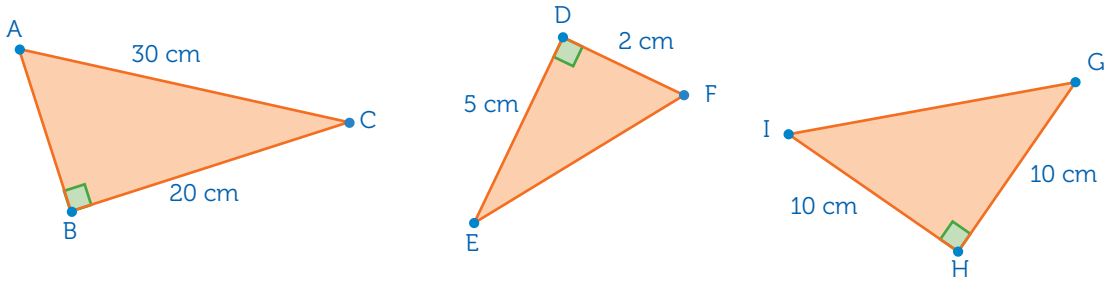
A partir de lo que hizo Camila, determiná cómo cambió el área del triángulo.

3 En el rombo del dibujo, las diagonales miden **a** y **b**. ¿Cuánto podrían medir las diagonales de otro rombo para que su área fuera $\frac{1}{4}$ del área del rombo dibujado?



4 Elizabeth calculó la medida de los catetos de un triángulo rectángulo, conociendo solamente la medida de su hipotenusa y utilizando el Teorema de Pitágoras. Eva dice que esto no es posible, ¿estás de acuerdo con ella? Explicá tu respuesta.

5 Para cada uno de los triángulos rectángulos, calculá la medida del lado cuya longitud no está indicada.



6 ¿Es posible que un triángulo rectángulo tenga lados con las siguientes medidas?

a) 1 cm, 2 cm, 2 cm.
b) 3 cm, 4 cm, 5 cm.
c) 4 cm, 7 cm, 12 cm.
d) 6 cm, 8 cm, 10 cm.

7 Un rectángulo tiene un lado de 7 cm y una diagonal de 10 cm. Calculá su área.

8 Encontrá la distancia al origen de coordenadas de cada uno de estos puntos: A = (−8; 4), B = (3; −5), C = (−100; −5).

9 Los puntos A = (2; 3), B = (4; 1) y C = (7; 4) son vértices de un triángulo. ¿Es cierto que $A\hat{B}C$ es rectángulo?

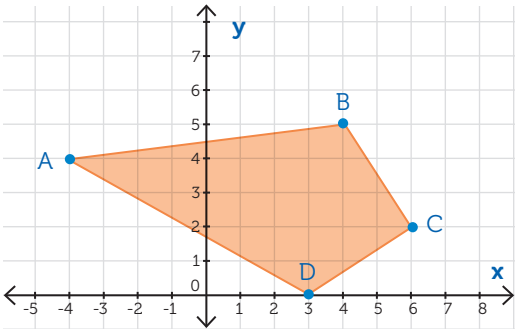
10 a) Realizá la siguiente construcción:

- Construí un cuadrado ABCD de 6 cm de lado.
- Marcá el punto medio de cada uno de sus lados, y llamalos E, F, G y H.
- Dibujá el cuadrilátero EFGH.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es EFGH? Calculá su perímetro.

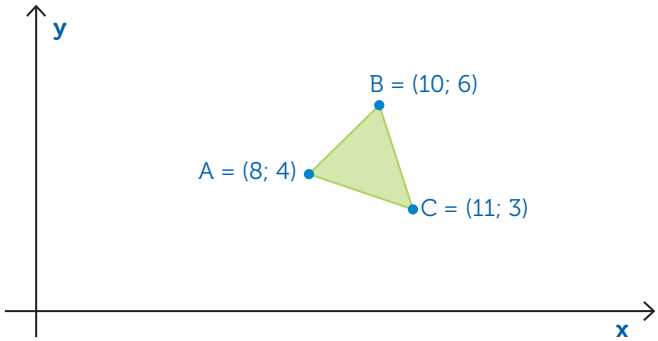
c) Si ABCD, en lugar de ser un cuadrado, fuera un rectángulo con lados de 3 cm y 6 cm, ¿qué figura sería EFGH? ¿Cuál sería su perímetro?

11 ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD?



12 Se sabe que los puntos P = (−1; −2), Q = (3; −5) y R = (9; 3) son tres de los cuatro vértices del rectángulo PQRS. Sin medir, decidí si el punto S = (5; 6) puede ser el cuarto vértice.

13 Calculá, sin medir, el área del triángulo ABC.



Esta página propone una primera introducción a la idea de azar, a partir de un relato histórico que incluye el uso de dados y juegos. Se trata de vincular esta idea con la de posibilidad de que ocurra cierto resultado, tal como se propicia en el apartado colectivo final.

10 PROBABILIDAD

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

Los juegos de azar siempre estuvieron presentes durante la historia de la humanidad, y los dados han sido uno de los elementos más empleados para desarrollarlos. Existe controversia con relación al tema de la procedencia de estos objetos, debido a que se han encontrado varias piezas que sugieren que eran utilizados como elementos de apuesta en espacios geográficos y períodos muy distanciados. Por ejemplo, el dado más antiguo que se halló hasta ahora fue descubierto en Persia y es de hace más de 5.000 años.

En América del Sur, los mapuches, uno de los pueblos originarios de la región, practicaban un juego llamado ***quechucan*** en el que utilizaban un dado de cinco caras, con forma piramidal y con marcas en cada una de ellas (desde una hasta cinco), al que llamaban ***pichca***. El nombre del juego proviene del vocablo ***quechu***, que significa "cinco".

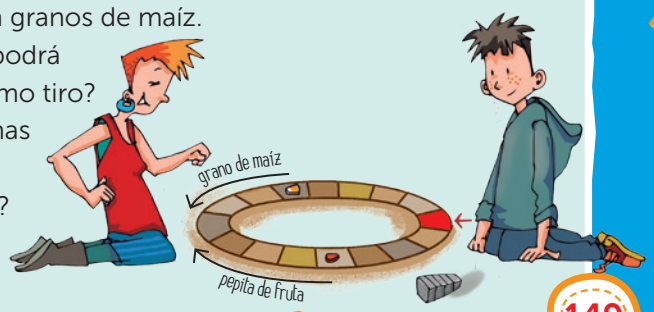
El ***quechucan*** se jugaba en un tablero circular marcado en el piso, con fichas que podían ser granos de maíz o pepitas de frutas, y "tirando" la ***pichca***. A partir de uno de los casilleros dos jugadores movían sus fichas, uno en el sentido contrario al del otro, intentando volver al casillero original. Cada vuelta que conseguían completar valía un punto y el primer jugador en llegar a 12 puntos era el ganador. Por turnos, cada jugador tiraba la ***pichca*** y movía su ficha tantos casilleros como la cantidad de marcas que tuviera su cara. Si en el medio del recorrido una de las fichas de un jugador caía en el mismo casillero en el que ya había una de las fichas del otro, la ficha del segundo jugador era expulsada del tablero.

PARA PENSAR ENTRE TODOS

El dibujo muestra un momento de una partida de *quechucan* en la que uno de los jugadores utiliza granos de maíz y avanza en sentido antihorario, y el otro utiliza pepitas de fruta y avanza en sentido inverso. El próximo en tirar la *pichca* es el que juega con granos de maíz.

a) ¿Es cierto que el jugador que usa granos de maíz no podrá expulsar la pepita de fruta de su oponente en el próximo tiro?

b) ¿Cuáles son las posibles combinaciones de las próximas dos tiradas de la *pichca* que le permitirían expulsar el grano de maíz al jugador que emplea pepitas de fruta?



En estas páginas se proponen problemas que intentan trazar un recorrido que va desde un tratamiento intuitivo de la noción de probabilidad (identificando sucesos seguros, probables e imposibles) hacia una definición más formal.

Los experimentos y sus posibles resultados

De a dos

1 Se arrojan dos dados simultáneamente y se registra la suma de puntos.

a) De los resultados que se señalan a continuación, ¿cuáles les parecen imposibles, cuáles van a ocurrir seguro y cuáles podrían ocurrir?

- Que la suma dé 5.
- Que la suma dé 1.
- Que la suma tenga a lo sumo dos dígitos.
- Que la suma sea par.
- Que la suma dé menor que 12.
- Que la suma dé mayor que 1.

b) ¿Cuáles son todos los resultados posibles para la suma?

c) Escriban un ejemplo de un resultado que, al tirar dos dados y sumar los puntos, resulte seguro, uno que resulte posible y otro que sea imposible, todos distintos a los del ítem a).

En el problema 1 se busca que los alumnos exploren el significado de que un hecho sea seguro, posible o imposible. En caso de que el docente lo considere adecuado, podría proponerles que realicen el experimento, o bien que utilicen algún simulador en la computadora o en el teléfono celular.

2 En el juego *tutti frutti*, al comenzar cada ronda se debe elegir una letra del abecedario al azar. Para hacer esa elección, Santiago utiliza una bolsa con bolillas que tienen las letras marcadas.

a) ¿Es más probable que salga la bolilla que está marcada con la letra D o la que está marcada con la letra Ñ?

b) ¿Es más probable que salga una vocal o una consonante?

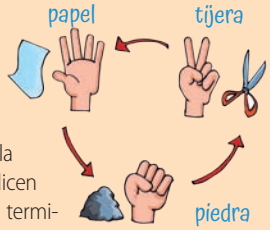
Para resolver el problema 2 b) los estudiantes podrían poner en juego una noción intuitiva de probabilidad: a mayor cantidad de casos favorables, mayor probabilidad de que un suceso ocurra. Se espera que los alumnos puedan dar este tipo de respuestas sin que se haya introducido aún una definición de probabilidad.

3

Para hacer en la carpeta

Piedra, papel o tijera

Es un juego con manos entre dos jugadores y en el que existen tres elementos: la piedra que vence a la tijera rompiéndola, la tijera que vence al papel cortándolo y el papel que vence a la piedra envolviéndola. Los jugadores dicen juntos "¡piedra, papel o tijera!" y justo al terminar muestran los dos al mismo tiempo una de sus manos, de modo que pueda verse el elemento que cada uno eligió.



Nacho y Yanina juegan a "piedra, papel o tijera".

a) Escribí todos los posibles resultados de una ronda.

En el problema 3 se presenta una situación para la cual el espacio muestral está conformado por duplas. Durante la resolución del ítem a), el docente podrá acordar con los alumnos si primero se registra el resultado de Yanina y luego el de Nacho, o viceversa, reconociendo la importancia de distinguir quién sacó cada una de las opciones.

b) ¿En qué casos se da un empate? ¿Cuántos casos son?

c) ¿Es cierto que si Yanina elige "tijera" tiene las mismas chances de ganar, de perder o de empatar? ¿Por qué?

Los estudiantes podrán resolver el problema 3 c) apelando a una noción de probabilidad asociada a la cantidad de casos favorables. En este caso, podrían responder afirmativamente reconociendo que Yanina tiene una posibilidad de ganar, una de perder y una de empatar. Al finalizar el problema 3 se podría proponer la lectura del texto "Para leer entre todos" y se podría señalar el listado de resultados del ítem a) como ejemplo de la definición de espacio muestral.

PARA LEER ENTRE TODOS

Un **experimento** es un proceso que se puede observar y que, además, puede repetirse. A los experimentos que están sujetos al azar se los llama **aleatorios**, debido a que aunque se puede saber cuál es el conjunto de resultados posibles, no se puede anticipar su resultado. Un **suceso** es cualquier resultado o combinación de resultados posibles de un experimento aleatorio. Al conjunto de todos los resultados posibles se lo llama **espacio muestral**.

4 Se realiza un experimento que consiste en sacar dos fichas de una bolsa. La bolsa contiene 4 fichas, cada una de un color diferente: azul, rojo, verde y amarillo. Se extrae una ficha de manera aleatoria, se la vuelve a poner en la bolsa y se extrae una segunda ficha.

a) Escribí una lista que contenga todos los posibles resultados que conforman el espacio muestral de este experimento.

En el problema 4 b) no se espera que los alumnos realicen un cálculo de probabilidades, sino que se apoyen en el espacio muestral para contar y comparar la cantidad de casos favorables de cada suceso. Por ejemplo, podrían responder que es más probable que sean de colores distintos porque esos casos son más de la mitad, mientras que los otros son menos de la mitad. Se trata de que los alumnos vayan construyendo la idea de probabilidad como la razón entre casos favorables y casos posibles.

b) ¿Es más probable que las dos fichas sean del mismo color o que sean de colores distintos?

PARA LEER ENTRE TODOS

La rama de la Matemática que estudia los experimentos aleatorios es la Probabilidad.
La **probabilidad de un suceso** es una medida que indica la posibilidad de que ese suceso ocurra. Cuando un **suceso** es **seguro**, se le asigna una probabilidad igual a 1. Cuando es **imposible**, se le asigna una probabilidad igual a 0.
Los sucesos aleatorios de un experimento pueden estar formados por varios resultados posibles, cada uno de los cuales se llama **suceso elemental**. Si todos los sucesos elementales son igualmente probables, se puede calcular la **probabilidad P(A) de un suceso aleatorio A**, a partir del cociente entre la cantidad de veces que puede ocurrir (casos favorables) y la cantidad de resultados posibles del experimento:

$$P(\mathbf{A}) = \frac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que salga un 5 al tirar un dado es $\frac{1}{6}$, ya que hay 6 casos posibles de los cuales solo 1 es favorable, porque hay un solo 5.

De a dos

5 Con el objetivo de juntar dinero para un campamento, los chicos de primer año hicieron una rifa de 100 números y con un solo premio. Entre todos los profesores de la escuela compraron 10 números, los directivos compraron 5, y el resto de los números fueron adquiridos por otros chicos de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que algún profesor gane la rifa? ¿Y de que la gane alguno de los directivos? Para responder las preguntas del problema 5 a) los estudiantes podrán utilizar la fórmula presentada en el texto "Para leer entre todos" obteniendo las fracciones 10/100 y 5/100. Sin embargo, algunos alumnos podrían expresarlas de manera simplificada: 1/10 y 1/20. El docente podría apoyarse en la equivalencia de fracciones.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la gane alguno de los chicos de la escuela?
Para responder el ítem b) los alumnos podrían calcular la probabilidad de manera directa, o bien a través de su complemento.

REVISAR MANERAS DE RESOLVER PROBLEMAS ENTRE TODOS

Revisen los problemas 2, 3 y 4 de estas páginas.

- ¿Cómo se puede calcular la probabilidad de los sucesos descritos en estos problemas?
- ¿Cambiarían alguna de sus respuestas?

Al abordar los problemas de estas páginas será conveniente retomar la definición de probabilidad y ponerla al servicio de la resolución. A su vez, se avanza sobre la noción de equiprobabilidad como la característica de un espacio muestral que permite utilizar la fórmula para calcular la probabilidad.

Cálculo de probabilidades

De a dos

1 Se tira un dado. Calculen la probabilidad de que ocurra cada suceso y ordénenlos desde los menos probables hasta los más probables.

- Que salga un 1.
- Que salga un número par.
- Que salga un número mayor que 4.
- Que salga un número mayor que 2.
- Que salga un divisor de 60.
- Que no salga un 1.

En el problema 1 se trata de que los estudiantes apelen a la fórmula para calcular las probabilidades. Para el suceso "que no salga un 1" el docente podría plantear que calcularan la probabilidad como 1 – 1/6, dado que es el complemento del suceso "que salga un 1". Estas estrategias para calcular probabilidades se retoman en el texto "Para leer entre todos".

PARA LEER ENTRE TODOS

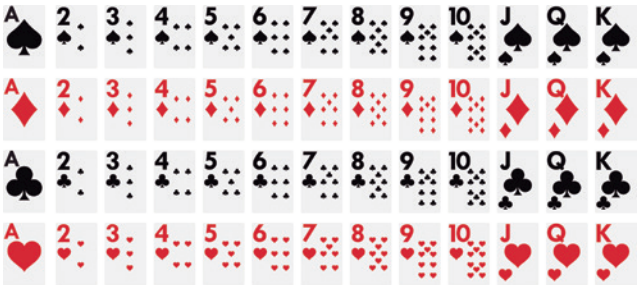
Dos sucesos **A** y **B** son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir en forma simultánea. En este caso, la probabilidad de que ocurra **A** o de que ocurra **B** se puede calcular como la suma de las probabilidades de **A** y de **B**. Esto se acostumbra escribir así: **P(A o B) = P(A) + P(B)**.
Si dos sucesos **A** y **B** son mutuamente excluyentes y entre los dos forman todo el espacio muestral, entonces la suma de las probabilidades de **A** y de **B** debe ser 1. Esto se puede escribir así: **P(A) + P(B) = 1**.

De a dos

2 De un mazo de cartas de póker (de la A hasta la K, de pica, diamante, trébol o corazón), se extrae una carta al azar.

a) Hallen la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.

- Que salga un 4 de trébol.
- Que salga una Q.
- Que salga una carta de corazón.
- Que salga una letra.
- Que salga un 9 rojo.
- Que salga un número.



b) ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos permiten determinar la probabilidad de que salga una carta que contenga un número?

$1 - \frac{16}{52} =$

$\frac{9}{52} + \frac{9}{52} + \frac{9}{52} + \frac{9}{52} =$

$\frac{9}{13} \cdot 4 =$

$\frac{9}{52} \cdot 4 =$

En grupos

3 Catalina tiene caramelos confitados de ananá, frutilla y limón. Tiene que armar bolsas con 12 caramelos cada una.

a) ¿Con cuántos caramelos de cada clase debería armar una bolsa para que la probabilidad de sacar al azar uno de cualquiera de los gustos fuera la misma?

Una cuestión a considerar es que en los ítems b) y c) del problema 3 las respuestas no son únicas. Por ejemplo, en el ítem b) es necesario que la bolsa contenga solamente 5 caramelos

b) ¿Cómo podría armar otra bolsa para que la probabilidad de sacar al azar un caramelo de limón fuera $\frac{5}{12}$?

de limón; pero de los restantes 7 puede haber distintas cantidades de ananá o de frutilla sin que se modifique la probabilidad.

c) ¿Y para que la probabilidad de sacar uno de ananá fuera $\frac{1}{4}$?

PARA LEER ENTRE TODOS

A un espacio muestral en el que todos los sucesos elementales son igualmente probables se lo llama **equiprobable**.
Por ejemplo, en cada lanzamiento de un dado es igualmente probable obtener cualquiera de los números. En este caso, el espacio muestral representado por el conjunto de resultados {1; 2; 3; 4; 5; 6} es equiprobable.

4 Hernán tiene un cajón en el que solamente guarda remeras del mismo modelo, que se diferencian únicamente por el color. Un día se levantó dormido y, sin prender la luz, tomó una remera al azar del cajón que contenía 8 azules, 8 rojas y 4 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sacado una remera roja?

Al resolver el problema 4 los estudiantes podrían responder de manera incorrecta que la probabilidad es 1/3, dado que son tres colores distintos. Sin embargo, si se describe el espacio muestral utilizando únicamente los colores, los resultados posibles no son igualmente probables. Por eso, es necesario distinguir cada una de las 20 remeras para formar el espacio muestral, de manera que resulte equiprobable. El docente podría apoyarse en el texto "Para leer entre todos" durante la reflexión colectiva acerca de la resolución de este problema.

En el problema 5 resulta interesante analizar que la probabilidad se puede calcular mediante la relación entre cada una de las partes y el total, sin necesidad de conocer las cantidades.

5 En una bolsa hay la misma cantidad de chupetines de tres sabores distintos: frutilla, naranja y manzana. Laura sacó un chupetín sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sacado un chupetín de frutilla?

El problema planteado en la sección colectiva pone en cuestión la necesidad de definir un espacio muestral equiprobable para poder calcular la probabilidad. Si se toma el conjunto formado por los números del 2 al 12 el espacio muestral no resulta equiprobable. Para elaborar la explicación solicitada será necesario que los estudiantes consideren el conjunto de las 36 duplas formadas por las combinaciones de los resultados de cada dado.

ELABORAR UNA EXPLICACIÓN ENTRE TODOS

Se arrojan dos dados iguales simultáneamente y se registra la suma de puntos.
Josefina dice que la probabilidad de que la suma sea 5 es $\frac{1}{11}$, ya que son 11 los posibles resultados y 5 es uno de ellos.

- ¿Están de acuerdo con la afirmación de Josefina?
- Expliquen cómo harían para calcular la probabilidad de que la suma sea 7.

En estas páginas se plantean problemas que involucran determinar la cantidad de elementos de colecciones que revisten diferentes niveles de complejidad. Se espera que los alumnos exploren formas de organizar el conteo de manera de asegurar que se cuentan todos los casos y que no se cuenta el mismo caso varias veces, sin necesidad de escribir todas las posibilidades. Se apunta a que los alumnos reconozcan la estructura multiplicativa de los problemas propuestos.

Problemas de conteo

De a dos

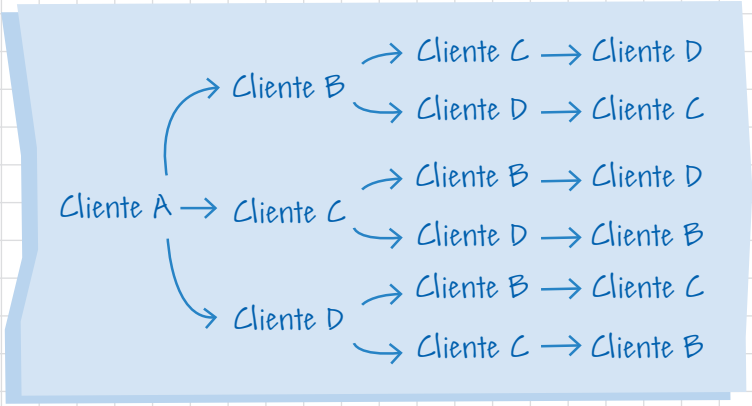
1 Antonio debe entregar mercadería a diferentes clientes.

Una manera posible para resolver el problema 1 a) consiste en hacer la lista de los 6 recorridos y luego contarlos. Sería interesante recuperar en un espacio colectivo que hay algunas maneras más "ordenadas".

Para hacer en la carpeta

a) Si para una de las entregas tiene que visitar a 3 clientes, ¿de cuántas maneras distintas podría hacer el reparto teniendo en cuenta solamente el orden de visita?

b) Con el objetivo de analizar los distintos órdenes en los que podría visitar a 4 clientes, Antonio hizo el siguiente esquema incompleto.



En el problema 1 b) se propone analizar una estructura de conteo con dos objetivos. Por un lado, que los estudiantes logren reconocer que en cada rama (comenzando con el cliente A y siguiendo "hasta el final") se representa un posible orden de visita de los clientes. Por otro lado, que puedan anticipar que la estructura del esquema se repetiría si las visitas empezaran con cualquiera de los otros clientes. De esta manera es posible establecer que la cantidad de posibilidades totales se puede calcular multiplicando por 4 la cantidad de posibilidades si se comenzara con el cliente A: $4 \cdot 6 = 24$.

A partir de este diagrama, ¿cuántas posibilidades de visitas diferentes pueden leerse? ¿Cuántas faltan?

c) ¿De cuántas maneras distintas podría visitar a 5 clientes teniendo en cuenta solamente el orden de visita?

Los estudiantes podrían resolver el ítem c) del problema 1 realizando una generalización sobre la resolución del ítem b). Si al cliente que se agrega se lo visitara en primera instancia, se podría pensar que el gráfico b) formará la primera rama del nuevo gráfico. Así, la cantidad de posibilidades es la misma que en el ítem anterior, y se repite 5 veces, por lo que la cantidad de posibilidades totales se puede calcular con el producto $5 \cdot 24 = 120$. Sería importante que se recuperase de manera colectiva cómo se fue construyendo el resultado final a partir de los cálculos parciales: $120 = 5 \cdot 24 = 5 \cdot 4 \cdot 6$. El docente podría traccionar para identificar que los factores del producto son las cantidades de clientes que se podrían visitar en cada lugar del orden del recorrido.

2 Para proteger la privacidad de su teléfono celular, Daniel utiliza una clave de 3 caracteres que incluye solamente las letras S, L y A y los números 9 y 5.

Para resolver

a) ¿Cuántas combinaciones distintas puede obtener usando esos caracteres y sin repetir ninguno?

Para resolver el problema 2 a) los estudiantes podrían recurrir a un diagrama de árbol para representar la situación y apoyarse en él para establecer que una manera de calcular la cantidad total de combinaciones es por medio de la multiplicación $5 \cdot 4 \cdot 3$. También podrían relacionar los factores de la multiplicación con el hecho de que para el primer lugar se puede usar cualquiera de los cinco caracteres; para el segundo, cualquiera de los cuatro que quedan, y para el tercero, alguno de los tres restantes.

Para hacer en la carpeta

b) Como le parece que es una clave fácil de descubrir, Daniel quiere modificarla. Una posibilidad es repetir los caracteres: por ejemplo, LL9. Otra alternativa es agregar un nuevo carácter y no repetir ninguno: por ejemplo, CL9. ¿Cuál de las dos opciones le conviene para obtener la mayor cantidad de combinaciones?

A partir del trabajo con el problema 2 b) se podría concluir que la posibilidad de repetir, o no, los caracteres determina distintos cálculos y cantidades de combinaciones. Si se pueden repetir los caracteres se obtiene $5 \cdot 5 \cdot 5$. En cambio, al agregar un carácter, es posible calcular el producto $6 \cdot 5 \cdot 4$.

Luego de la lectura del apartado “Para leer entre todos”, el docente podrá propiciar un análisis en torno a los cálculos multiplicativos que permiten obtener la cantidad de variaciones simples y la cantidad de permutaciones, e incluso, si lo considera pertinente, definir el factorial de un número.

PARA LEER ENTRE TODOS

Si se quisiera, por ejemplo, armar grupos de 3 letras con las letras A, B, C y D sin que se repitan, se podrían obtener: ABC, ABD, ACB, ACD, ... , etc. La cantidad de grupos que se puede obtener se llama **variación simple sin repetición**, en este caso, de 4 elementos tomados de a 3. Si en cambio se arman grupos de 4 letras, es decir, usando todos los elementos sin repetirlos, la cantidad que se obtiene se llama **permutación**. Los grupos serían ABCD, ABDC, ADBC, ADCB, ... , etc.

3 Cinco amigos compraron entradas para ir al cine en asientos consecutivos.

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar para ver la película?

A partir de la resolución del problema 3 a) se podría retomar el texto “Para leer entre todos” e identificar este caso con una permutación de 5 elementos. El docente podría introducir en este momento la notación 5! y su significado –o recuperarlos, si el tema ya se ha discutido–, como una manera de obtener la respuesta.

b) Fran, uno de los amigos, dice que no quiere sentarse en ninguna de las puntas. ¿De cuántas maneras distintas se podrían sentar con esta condición?

A diferencia de los casos anteriores, en el problema 3 b) se incluye una condición que restringe la cantidad de posibilidades para algunos de los lugares. Al plantear el cálculo se podrá empezar por considerar las posibilidades para los asientos primero y último.

4 a) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 4, 5, 8 y 9, si no se permiten repeticiones en el mismo número?

b) ¿Cuántos de esos números son pares?

Para resolver el problema 4 b) los estudiantes deberán considerar que para el cuarto dígito solo existen dos posibilidades (4 u 8) y que por lo tanto no se trata de un caso de variaciones simples. Como para el último dígito hay 2 posibilidades, para el tercer dígito hay 5, para el segundo 4 y para el primero 3. Podrán contar entonces la cantidad de números pares por medio del producto $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$, “armando” el número “de atrás hacia adelante”.

c) ¿Cuántos de esos números son impares?

d) Y si se pudieran repetir las cifras, ¿cuántos números de cuatro cifras se podrían formar usando los mismos dígitos?

A partir de la resolución del problema 4 d) el docente podrá instalar la noción de variaciones con repetición, en términos similares a la definición de variaciones simples y apoyándose en los datos del problema.

5 Facundo debe elegir una contraseña numérica para su computadora, sin repetir ningún dígito. ¿Es cierto que la cantidad de contraseñas que podría armar es la misma si decidiese ponerle 9 o 10 dígitos?

El problema 5 apunta a analizar que la cantidad de variaciones de 10 elementos tomados de a 9 es la misma que la cantidad de permutaciones de 10 elementos. A partir de este hecho existe la posibilidad de reflexionar acerca de una cuestión que podría resultar antiintuitiva: si se define el nivel de seguridad de una contraseña como la cantidad total de contraseñas que se pueden armar bajo ciertas condiciones, en este caso elegir 9 o 10 dígitos no hace que la contraseña sea más segura.

REVISAR MANERAS DE RESOLVER ENTRE TODOS

- Para resolver el problema 4 a) calcularon la variación de 6 elementos tomados de a 4. ¿Cómo se podrían modificar la pregunta y los datos para que la respuesta fuera la variación de 8 elementos tomados de a 5?
- ¿Es cierto que la parte a) del problema 2 se puede pensar como un caso de variaciones simples sin repeticiones? ¿Y la parte b)?

En los problemas de estas páginas se propone el cálculo de probabilidades en situaciones en las que es posible contar la cantidad de casos totales y/o favorables poniendo en juego las estrategias elaboradas en las páginas anteriores a propósito del estudio de variaciones y permutaciones.

Más problemas de probabilidades

De a dos

Para hacer en la carpeta

1 Utilizando los dígitos del 0 al 9 se forman números de 4 cifras. Si no se permiten repeticiones en cada uno:

a) ¿Cuántos números se pueden formar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los números sea impar?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los números comience con la cifra 6?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los números sea múltiplo de 5?

e) Si se pudieran repetir las cifras, ¿cuál sería la probabilidad de que se formase un número impar?

Para resolver el problema 1 los estudiantes deberán considerar que, al tratarse de números de cuatro cifras, en la primera posición no se puede ubicar el 0.

2 Se arrojan dos dados de manera simultánea, uno rosa y otro violeta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 en el dado rosa y un 1 en el violeta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 en el dado violeta?

En el problema 2 b) sería interesante analizar que es posible definir dos espacios muestrales distintos, ambos equiprobables, para calcular la probabilidad: uno que contenga todas las combinaciones posibles de los resultados de los dos dados, y otro conformado solamente por los resultados posibles del dado violeta. En el primer caso los resultados favorables son 6, sobre 36 posibles. En el segundo caso existe un único resultado favorable sobre 6 posibles.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga par en el dado rosa e impar en el violeta?

Comparando las fracciones que se forman en cada uno de los casos se puede identificar que se trata de la misma probabilidad: 6/36 = 1/6.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en ambos dados salga el mismo número?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número diferente en cada dado?

Al resolver el problema 2 e) será interesante analizar que se trata de calcular la probabilidad del suceso complementario al del ítem d). De esta manera podrían calcular la probabilidad restando a 1 la probabilidad calculada en ese ítem: 1 – 1/6 = 5/6.

PARA LEER ENTRE TODOS

Si **P(A)** es la probabilidad de que ocurra el suceso **A**, **la probabilidad de que no ocurra A** se puede hallar mediante el cálculo **1 – P(A)**, ya que ambos sucesos son mutuamente excluyentes y forman todo el espacio muestral. Estos sucesos se llaman **complementarios** y el complemento de **A** se simboliza **A'**.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que al lanzar un dado salga un divisor de 30 se puede hallar primero la probabilidad de que no salga un divisor de 30, que es $\frac{1}{6}$, y luego calcular $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

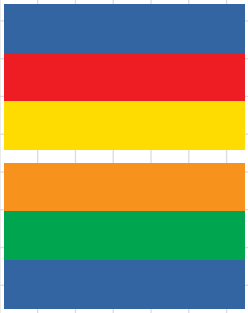
3 Seis amigos hicieron una videoconferencia usando un programa de computadora que ordena los videos con las caras en una grilla de forma rectangular.

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los videos de esa forma?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los videos con las caras de Martín y Gustavo, dos de los amigos, queden uno al lado del otro?

Para resolver el problema 3 b) los estudiantes deberán tener en cuenta que en una organización rectangular las caras pueden quedar una al lado de la otra de manera horizontal (una al costado de la otra) o de manera vertical (una arriba de la otra). Si se numeran las ubicaciones del 1 al 3 en la fila superior y del 4 al 6 en la inferior, la cantidad de casos favorables son 14: 1 - 2, 2 - 1, 2 - 3, 3 - 2, 4 - 5, 5 - 4, 5 - 6 y 6 - 5, de forma horizontal; 1 - 4, 4 - 1, 2 - 5, 5 - 2, 3 - 6 y 6 - 3, de forma vertical.

4 Para representar a los diversos cursos de la escuela se van a confeccionar banderas con tres franjas horizontales de colores distintos, utilizando azul, rojo, verde, amarillo y naranja.



a) ¿Cuántas banderas diferentes se podrían hacer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a 1.° le toque una bandera que tenga una franja verde en el medio?

En el problema 4 c), para contar los casos favorables, los estudiantes deberán considerar las tres posiciones posibles de la franja roja. Por ejemplo, podrían contar los casos en que el color rojo se encuentra en la primera franja con el cálculo $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$, para luego multiplicarlo por 3; notarán que el resultado es el mismo si se consideran

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a 2.° le toque una bandera que tenga una franja roja?

las otras dos posiciones. También podrían calcular la probabilidad de que una franja cualquiera sea de color rojo y sumarla tres veces, una por cada posición posible: $1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5$.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a 5.° le toque una bandera que no tenga una franja amarilla?

Para resolver el problema 4 d) los alumnos podrían notar que este suceso es el complementario de que la bandera tenga alguna franja amarilla. Como en esta situación la probabilidad no cambia de acuerdo al color, podrían calcular la probabilidad restando a 1 la probabilidad calculada en el ítem c): $1 - 3/5 = 2/5$.

RESOLVER PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES ENTRE TODOS

Para jugar al truco se utiliza un mazo de 40 cartas españolas. En cada mano se reparten tres cartas. Las cartas más importantes son el as de espadas y el as de bastos.
Para calcular la probabilidad de que a un jugador le toquen ambas cartas en la misma mano se pueden considerar los distintos casos en los que esto sucede. Por ejemplo, que le toque el as de espadas como primera carta, el as de bastos como segunda y cualquiera de las restantes 38 cartas como tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que le toquen ambas cartas en la misma mano?

RECAPITULAR ENTRE TODOS

Los objetivos de todas las páginas "RECAPITULAR ENTRE TODOS" se explicitan en el primer capítulo, en la página 16.

1 a) Relean los problemas de las páginas 152 y 153. En estas páginas se puso en juego la noción de equiprobabilidad. Identifiquen y propongan un espacio muestral que sea equiprobable y otro que no lo sea. ¿Cómo se pueden dar cuenta de que un espacio muestral es equiprobable?

b) Revisen los problemas de las páginas 156 y 157. ¿Qué tuvieron en cuenta para resolverlos?

2 a) Seleccionen el problema de las páginas 154 y 155 que les haya parecido más difícil. Escriban por qué les parece difícil y también un consejo para resolver otro problema parecido.

b) Vuelvan a mirar los problemas que resolvieron en este capítulo, completen los que hayan quedado sin resolver y revisen los errores. Anoten las dudas que les surjan para aclararlas entre todos.

3 Identifiquen en las páginas del capítulo qué problemas involucran cada una de las siguientes nociones:

- Sucesos que tengan la misma posibilidad de ocurrir.
- Permutaciones de **m** elementos.
- Sucesos seguros y sucesos imposibles.
- Probabilidades calculadas con la fórmula $\mathbf{P(S)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.
- Probabilidades calculadas con el cálculo $1 - \mathbf{P(S)}$.
- Variaciones simples con repetición y variaciones sin repetición.

4 a) Se tiran un dado de seis caras y una moneda al mismo tiempo. ¿Cómo podrían explicar que la probabilidad de que salga ceca en la moneda es la misma de que salga un número par en el dado?

b) Expliquen por qué la probabilidad de que salga un divisor de 6 al tirar un dado se puede calcular restando a 1 la probabilidad de que salga 4 o 5.

5 Revisen entre todos lo que aprendieron sobre probabilidad y escriban las ideas más importantes en la carpeta.

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR

PARA HACER EN LA CARPETA

1 Se elige al azar una bolilla de un bolillero que tiene números del 1 al 100.

a) ¿Es más probable que salga un número par o un divisor de 100?
b) ¿Es más probable que salga un número impar o un número primo?

2 Hallá la probabilidad de obtener más de 7 puntos al arrojar dos dados simultáneamente y sumar lo que se obtiene en cada uno.

3 Pablo cumple los años el 30 de octubre. Ese día le regalaron una computadora y para configurarla debió elegir una contraseña de 4 caracteres distintos. Para crear la clave usó las letras de su nombre y los números 3 y 0, por el día de su cumpleaños.

a) Escribí algunas contraseñas posibles. ¿Cuántas contraseñas diferentes pudo haber formado?

b) Como Pablo se entera de que su hermana intenta adivinar la contraseña, decide cambiarla usando los mismos caracteres. Considera dos opciones: aumentar a 5 la cantidad de caracteres o poder repetirlos. ¿Con cuál de estas opciones puede formar más contraseñas?

4 En un juego de mesa se usan un dado común de 6 caras y una moneda. Si en la moneda sale cara, el puntaje del dado se multiplica por dos. En cambio, si sale ceca, el puntaje del dado se multiplica por tres. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 puntos? ¿Y la probabilidad de obtener 14?

5 En una bolsa hay caramelos de frutilla, ananá y manzana. La probabilidad de extraer al azar un caramelo de frutilla es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de extraer uno de ananá es $\frac{1}{6}$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar un caramelo de manzana?

b) Si se sabe que la bolsa contiene 12 caramelos de frutilla, ¿qué cantidad de caramelos de cada uno de los otros gustos hay?

6 De un mazo de 40 cartas españolas (sin los 8, los 9 y los comodines) se extrae una carta al azar. En cada caso, describí un suceso que tenga la probabilidad indicada.

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{40}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{1}{4}$

7 En una bolsa hay bolitas de colores: 3 verdes, 5 rojas y 4 amarillas.

a) Si se saca una bolita, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

b) Se saca primero una bolita, se anota el color, se la vuelve a introducir, y luego se saca una segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas? ¿Y de que las dos sean del mismo color?

8 Respondé las preguntas teniendo en cuenta que se utilizan los caracteres #, $, 1, 3, 5 y H, y que no se permiten repeticiones.

a) ¿Cuántos códigos de cuatro caracteres se pueden formar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los códigos termine en 5 o en $?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los códigos comience con la cifra 3?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los códigos empiece con # y finalice con 1?

e) Si se pudieran repetir los caracteres, ¿cuál sería la probabilidad de que uno de los códigos comenzase con 3?

9 Se mezclan 40 naipes de un mazo de cartas españolas (se quitaron los 8, los 9 y los comodines) y se saca uno sin mirar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de espadas? ¿Y una de oros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un 5? ¿Y de que sea un 10?

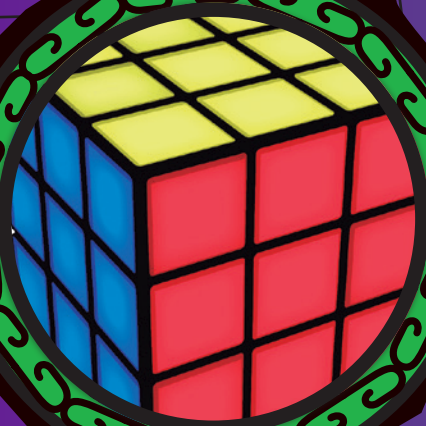
c) Si se quita del mazo el 7 de espadas, ¿la probabilidad de que salga un 5 ahora es mayor, menor o igual que cuando estaba el 7?

d) Si se quita del mazo el 5 de espadas, ¿la probabilidad de que salga un 5 ahora es mayor, menor o igual que cuando estaba el 5 de espadas?

10 Para representar a la escuela en una competencia de velocidad, el profesor de Educación Física va a elegir al azar a tres estudiantes de los cinco que corren más rápido, entre los cuales se encuentra Claudio. ¿Cuál es la probabilidad de que Claudio sea seleccionado para representar a la escuela?

COSAS DE MATE DE AQUÍ Y ALLÁ...

...para conocer las prácticas matemáticas de distintas culturas.



SANTILLANA

978-950-46-6135-1

9 789504 661351