Matemática en secundaria

2.° CABA 3.° ES

Libro para el docente

Matemática en secundaria 2.º CABA/3.º ES - Libro para el docente es una obra colectiva, creada, diseñada y realizada en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana, bajo la dirección de Graciela Pérez de Lois, por el siguiente equipo:

Coordinación general: Claudia Broitman.

Coordinación didáctica: Horacio Itzcovich.

Autoría: María Mónica Becerril, Patricia García y Verónica Grimaldi.

Lectura crítica: Andrea Novembre.

Edición: Juan Sosa.

Jefa de edición: María Laura Latorre.

Gerencia de Gestión Editorial: Mónica Pavicich.

SANTILLANA

La realización artística y gráfica de esta edición ha sido efectuada por el siguiente equipo:
Jefa de arte: Claudia Fano
Diseño de tapa y diagramación: Alejandro Pescatore
Corrección: Paula Smulevich
Ilustración: Leonardo Arias, Lancman Ink
Ilustraciones matemáticas: Manuel Lois
Documentación fotográfica: Leticia Gómez Castro, Teresa Pascual y Nicolas Verdura
Preimpresión: Marcelo Fernández, Gustavo Ramírez y Maximiliano Rodríguez
Gerencia de producción: Gregorio Branca

Este libro no puede ser reproducido total ni parcialmente en ninguna forma, ni por ningún medio o procedimiento, sea reprográfico, fotocopia, microfilmación, mimeógrafo o cualquier otro sistema mecánico, fotoquímico, electrónico, informático, magnético, electroóptico, etcétera. Cualquier reproducción sin permiso de la editorial viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

© 2012, EDICIONES SANTILLANA S.A.

Av. L. N. Alem 720 (C1001AAP),
Ciudad Autónoma de Buenos Aires,
Argentina.

ISBN: 978-950-46-2437-0
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.

Matemática en secundaria 2°/3° : libro del docente / María Mónica Becerril ... [et.al.] ;
coordinado por Claudia Broitman y Horacio Itzcovich. - 1a ed. - Buenos Aires : Santillana,
2011.
192 p. ; 28x22 cm.

ISBN 978-950-46-2437-0

1. Formación Docente. 2. Matemática. I. Becerril, María Mónica II. Broitman, Claudia, coord. III. Itzcovich, Horacio, coord.
CDD 371.1

Impreso en Argentina. Printed in Argentina.
Primera edición: diciembre de 2011.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de diciembre de 2011, en FP Compañia Impresora, Beruti 1560, Florida, Buenos Aires, República Argentina.

Índice

Índice de contenidos ..... **IV**

1. Enfoque didáctico de *Matemática en 2.º/3.º* ..... **VI**

El papel que podrían desempeñar los problemas VI

Secuenciación de los problemas IX

La exploración como parte del trabajo matemático XI

Los modos de representación XIII

La validación, un desafío crucial XIV

Hacia la generalización XV

El uso de las letras XVI

Relaciones entre conceptos que aparentan ser independientes XVII

El uso de recursos tecnológicos XVIII

Formas de organización y gestión de la clase XIX

Roles del docente XXII

2. El tratamiento de los contenidos en *Matemática en 2.º/3.º* ..... **XXIV**

Capítulo 1: Números enteros XXIV

Capítulo 2: Problemas de conteo y fórmulas XXIV

Capítulo 3: Áreas de figuras XXV

Capítulo 4: Números racionales XXV

Capítulo 5: Función lineal y su comportamiento XXVI

Capítulo 6: Semejanza y teorema de Thales XXVI

Capítulo 7: Números racionales y números reales XXVII

Capítulo 8: Función lineal y ecuación de la recta XXVII

Capítulo 9: Estadística y probabilidad XXVIII

Capítulo 10: Función lineal y sistemas de ecuaciones lineales XXVIII

Capítulo 11: Función cuadrática XXIX

Bibliografía recomendada ..... **XXX**

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Índice de contenidos

Capítulo 1. Números enteros

Nociones de múltiplo y divisor ... 6-7

Descomposición de un número en factores primos ... 8-9

Análisis de la estructura de un cálculo para decidir cuestiones de divisibilidad con números naturales ... 10-13

Divisibilidad con números enteros ... 14

Divisiones con números enteros ... 15

Propiedades de los números enteros. Producción, formulación y validación de conjeturas referidas a cuestiones de divisibilidad con números enteros ... 16

Capítulo 2. Problemas de conteo y fórmulas

Variaciones simples. Permutaciones. Variaciones con repetición ... 20-21

Problemas de conteo. Orden de los elementos ... 22-23

Fórmulas para contar ... 24-26

Capítulo 3. Áreas de figuras

Comparación de áreas de figuras ... 30-31

Producción y uso de fórmulas para comparar áreas de triángulos y cuadriláteros ... 32-35

Variación del área de triángulos y cuadriláteros en función de la variación de sus elementos ... 36-38

Capítulo 4. Números racionales

Las fracciones y las proporciones ... 42

Números racionales en la recta numérica ... 43

Conmensurabilidad de segmentos ... 44-45

Redondeo y truncamiento para aproximar decimales ... 46-47

Notación científica ... 48

La propiedad de densidad en los números racionales ... 49-50

Capítulo 5. Función lineal y su comportamiento

Noción de función y sus diversas representaciones ... 54-55

Variaciones uniformes ... 56-57

Función lineal como modelo de variación uniforme ... 58-59

Identificación de puntos que pertenecen al gráfico de una función lineal ... 60-61

Funciones lineales ... 62-63

Introducción a la resolución de ecuaciones lineales ... 64-65

Funciones de proporcionalidad inversa ... 66

Capítulo 6. Semejanza y teorema de Thales

Construcción de triángulos dados ciertos datos. Análisis de cantidad de soluciones ... 70-71

Construcción de triángulos dados ciertos datos. Triángulos semejantes ... 72-73

Condiciones que garantizan la semejanza de triángulos ... 74-75

Lados homólogos proporcionales. Razón de semejanza ... 76-77

Criterios de semejanza de triángulos ... 78

Introducción al teorema de Thales ... 79

Teorema de Thales ... 80-81

División de un segmento en partes proporcionales ... 82-83

Base media de un triángulo ... 84

Razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes ... 85-86

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Capítulo 7. Números racionales y números reales

Potencias con exponente racional ... 90-91

Radicación con números racionales ... 92

Propiedades de potencias y raíces ... 93

Propiedades de potencias y raíces para resolver cálculos ... 94

Números irracionales ... 95-97

Números reales ... 98-99

Números irracionales ... 100

Capítulo 8. Función lineal y ecuación de la recta

Función lineal y ecuación de la recta ... 104-105

Pendiente y ordenada al origen ... 106-107

Rectas paralelas ... 108

Rectas perpendiculares ... 109

Representación de una recta a partir de ciertos datos ... 110-111

Problemas que se modelizan con ecuaciones lineales. Problemas con infinitas soluciones y con una solución ... 112-113

Conjunto solución. Ecuaciones equivalentes ... 114-116

Capítulo 9. Estadística y probabilidad

Población, muestra y variables ... 120-121

Introducción a la noción de histograma ... 122-123

Medidas de tendencia central ... 124-125

Cálculo de probabilidades ... 126-127

Probabilidad compuesta ... 128-129

Probabilidad condicional ... 130

Capítulo 10. Función lineal y sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales que involucran transformaciones algebraicas ... 134-136

Sistemas de ecuaciones ... 137

Sistemas de ecuaciones equivalentes ... 138-139

Representaciones gráficas para estimar soluciones y controlar procedimientos algebraicos ... 140-141

Sistemas de ecuaciones con una solución y sin solución ... 142-143

Sistemas de ecuaciones con una solución, con infinitas soluciones y sin solución ... 144

Capítulo 11. Función cuadrática

Producción de fórmulas en las que una variable debe elevarse al cuadrado ... 148-149

Problemas que pueden modelizarse mediante funciones cuadráticas ... 150-151

Comparación del crecimiento de funciones lineales y cuadráticas ... 152

Vértice y eje de simetría en los gráficos de funciones cuadráticas ... 153-154

Gráficos y fórmulas correspondientes a variaciones de la función $f(x) = x^2$ ... 155

Ceros de una función cuadrática. Intervalos de positividad y negatividad ... 156

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

1. Enfoque didáctico de *Matemática en 2.º/ 3.º*

La intención de este apartado es hacer explícitas algunas ideas sobre la enseñanza de la Matemática que fundamentan las decisiones adoptadas para la elaboración de este libro.

Intentaremos comunicar dos cuestiones centrales. Por una parte, algunos rasgos del enfoque didáctico y de la modalidad de trabajo que se propone desarrollar en las clases de Matemática que favorecerían el despliegue, por parte de los alumnos, de cierto tipo de actividad. Por otra parte, en consonancia con el enfoque adoptado, los criterios que han sustentado la selección, la organización y la secuenciación de los contenidos. Ambos aspectos se identificarán con algunos ejemplos de cómo se esbozan estas cuestiones en las páginas del libro.

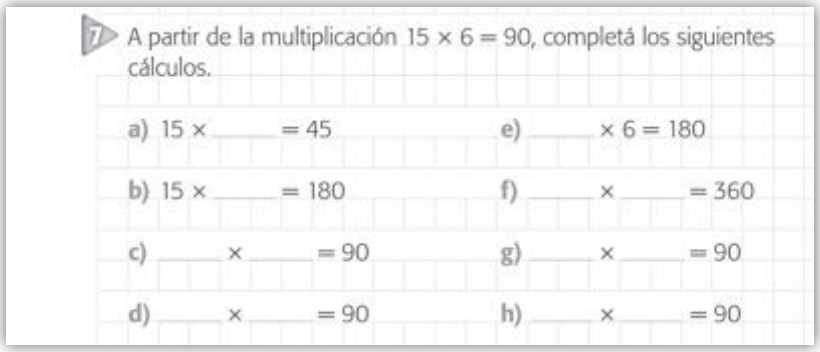
El papel que podrían desempeñar los problemas

Los problemas constituyen la base del trabajo matemático, permiten proponer nuevos desafíos y durante cierto tiempo se constituyen en objeto de estudio. Se parte de la idea de que es necesario que los alumnos se enfrenten a nuevas y variadas situaciones que promuevan procesos constructivos a partir de la exigencia de poner en juego conocimientos que pudieran estar disponibles. Este proceso exige elaboraciones y reelaboraciones sucesivas que pueden propiciarse desde la enseñanza apuntando a un acercamiento progresivo desde los conocimientos de los alumnos hacia los saberes propios de la Matemática.

¿Qué entendemos por problema? Para que los alumnos puedan ir construyendo una idea acerca del trabajo matemático y del sentido de los conocimientos que se intenta transmitir, precisan enfrentarse a situaciones que les presenten cierto grado de dificultad, en las cuales los conocimientos que disponen no resulten suficientes para dar cuenta de una resolución, de una respuesta. No se espera, entonces, que "salgan bien" desde el primer intento; por el contrario, es el desafío que propone la situación el que genera la posibilidad de producir algo nuevo. La complejidad de los problemas ha de ser tal que los conocimientos de los alumnos no sean suficientes para tratarlos "con comodidad", pero a la vez debe permitirles imaginar y desplegar formas de resolución o exploración. Es esperable que las estrategias utilizadas inicialmente no sean "expertas" ni muy económicas, pero constituirán el punto de partida para la producción de nuevos conocimientos.

Además de los "enunciados con preguntas", hay otras prácticas que también pueden constituirse en problemas. Entre ellas, los siguientes ejemplos:

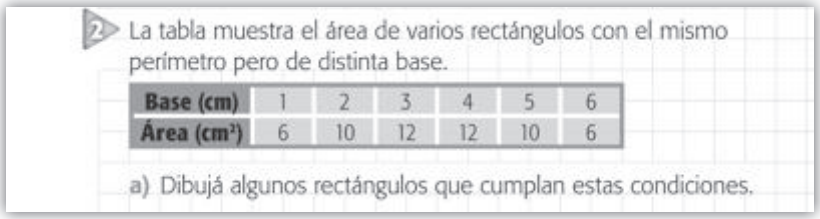
- encontrar el resultado de un cálculo sin hacer la cuenta;



7 A partir de la multiplicación 15 × 6 = 90, completá los siguientes cálculos.

a) 15 × ____ = 45
e) ____ × 6 = 180
b) 15 × ____ = 180
f) ____ × ____ = 360
c) ____ × ____ = 90
g) ____ × ____ = 90
d) ____ × ____ = 90
h) ____ × ____ = 90

- analizar la cantidad de soluciones que podría admitir un problema;



2 La tabla muestra el área de varios rectángulos con el mismo perímetro pero de distinta base.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6
Área (cm²)	6	10	12	12	10	6

a) Dibujá algunos rectángulos que cumplan estas condiciones.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

• identificar la variación de un resultado en función de la variación de algunos de los datos;

2 a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de tres?

b) ¿Será cierto que si se suman ***k*** números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado será siempre un múltiplo de ***k***?

• determinar una medida sin medir;

5 Sin medir, decidí si en cada uno de los siguientes dibujos el área sombreada es mayor, menor o igual al área blanca. Justificá tu respuesta.

• determinar la validez de ciertas afirmaciones;

3 ¿Será cierto que un rombo de diagonales ***a*** y ***b*** tiene la misma área que un rectángulo cuyos lados miden ***a*** y $\frac{b}{2}$? ¿Por qué?

• anticipar si será posible realizar cierta construcción geométrica bajo determinadas condiciones;

3 ¿Es posible construir un triángulo ABC y otro DEF cuyos lados midan el doble que los del $A\hat{B}C$, pero que no sean triángulos semejantes? ¿Por qué?

• interpretar o producir demostraciones de ciertas propiedades;

Una vuelta de tuerca entre todos

Enuncien un criterio de semejanza para triángulos rectángulos pero que no sirva para otro triángulo que no sea rectángulo.

• interpretar y producir expresiones algebraicas que modelicen situaciones diversas;

Para hacer en parejas con la compu

3 a) Usen el programa GeoGebra para representar gráficamente la información brindada en esta tabla de valores.

X	1	2	3	0,5	1,5	15
Y	24	12	8	48	16	1,6

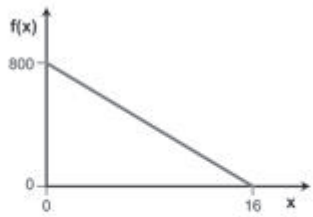
b) ¿Es cierto que los puntos del gráfico quedan alineados? ¿Por qué sí o por qué no?

c) Escriban 5 pares de puntos más que pertenezcan al gráfico, y expliquen cómo los encontraron.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

• interpretar información en diferentes portadores;

1 En el gráfico que se muestra se representó la velocidad ***f(x)*** a la que se desplaza un auto, medida en metros por minuto, en función del tiempo ***x*** que transcurre desde un determinado instante, medido en minutos.

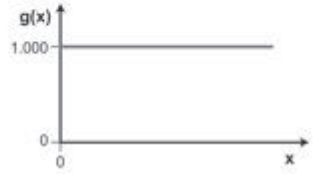


a) ¿Se podrá saber si el auto está frenando, acelerando o mantiene su velocidad constante? Si pensás que sí, explicá cómo; si creés que no, indicá por qué.

b) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas representan la situación graficada? Considerá que ***x*** es el tiempo en minutos y ***f(x)*** es la velocidad del auto, que depende de ***x***, expresada en metros por minuto.

$f(x) = 800 - 16 \cdot x$ $\quad f(x) = 800 \cdot x - 16$ $\quad f(x) = 800 - 50 \cdot x$ $\quad f(x) = 800 + 50 \cdot x$

c) En este otro gráfico se representa la velocidad de otro auto en función del tiempo. ¿Está frenando, acelerando o mantiene su velocidad constante?



• establecer relaciones entre conceptos;

2 De un mazo de 48 cartas españolas se extrae una carta al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 3? ¿Y de sacar un 3 de espadas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta elegida sea de oro o de bastos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta elegida sea un 1 o un 2?

d) ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos permiten determinar la probabilidad de que salga una carta cuyo número sea menor o igual que 6?

I. $\frac{1}{48} \times 6$ $\quad$ II. $\frac{6}{48} + \frac{6}{48} + \frac{6}{48} + \frac{6}{48}$ $\quad$ III. $\frac{6}{48} \times 4$ $\quad$ IV. $\frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48}$

• establecer condiciones o un dominio de validez.

2 ¿Será cierto que si el ángulo A del triángulo ABC mide lo mismo que el ángulo D del triángulo DEF, y el ángulo B del triángulo ABC mide lo mismo que el ángulo E del triángulo DEF, estas dos condiciones alcanzan para asegurar que los dos triángulos son semejantes? ¿Por qué?

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Cada uno de estos diferentes tipos de tareas brinda oportunidad a los alumnos de enfrentarse con nuevos desafíos asociados al modo de trabajo que se propicia desplegar a lo largo de todo el libro.

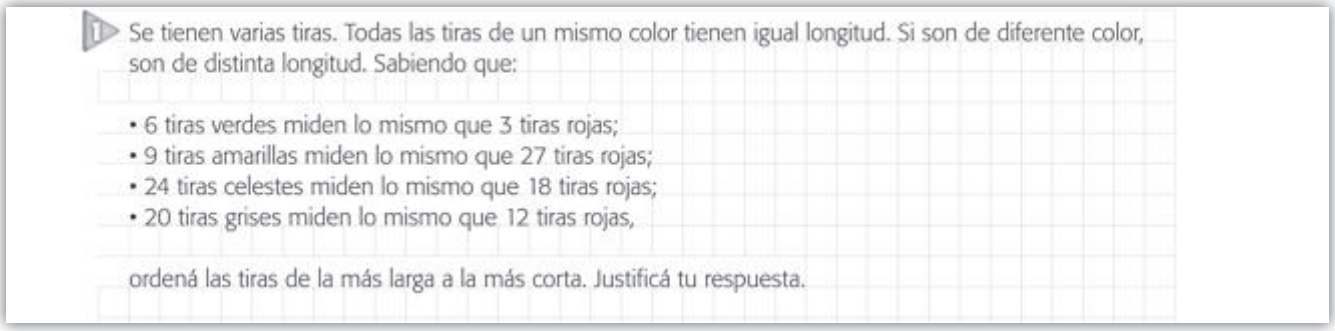
Secuenciación de los problemas

Para promover avances sobre el dominio de un concepto por parte de los alumnos, un recorrido posible lo constituye la resolución de una colección de situaciones similares. Se busca que los alumnos puedan poner en juego sus conocimientos como punto de partida –aun cuando sean erróneos o no convencionales– y a la vez ponerlos a prueba, modificarlos, ampliarlos y sistematizarlos a lo largo de varias oportunidades. Un trabajo sistemático que incluya un conjunto de clases próximas entre sí en torno a ciertas cuestiones vinculadas a un mismo tipo de problema, a un cierto sentido de un conocimiento, promueve la reflexión y la reorganización de estrategias de resolución, permite volver sobre las relaciones que se identificaron o establecieron en clases o problemas anteriores, habilita a abandonar ensayos erróneos e intentar nuevas aproximaciones.

Por ello, las diferentes propuestas de este libro se organizan en secuencias que apuntan a promover avances. Además de volver sobre una misma clase de situaciones con nuevas herramientas, es necesario que los alumnos se enfrenten a problemas que amplíen los sentidos del conocimiento que se está tratando. Es así como se van incorporando progresivamente ciertas variaciones que agregan nuevos desafíos.

Para sostener estas ideas sobre los problemas y su secuenciación es necesario aceptar y prever cierta provisoriedad y el largo plazo en los procesos de construcción de conceptos matemáticos en la escuela. Aquellas cuestiones que en algún momento se resuelven con estrategias menos avanzadas, luego de un cierto tiempo de trabajo sostenido en torno a varios problemas similares, podrán resolverse con recursos más adaptados.

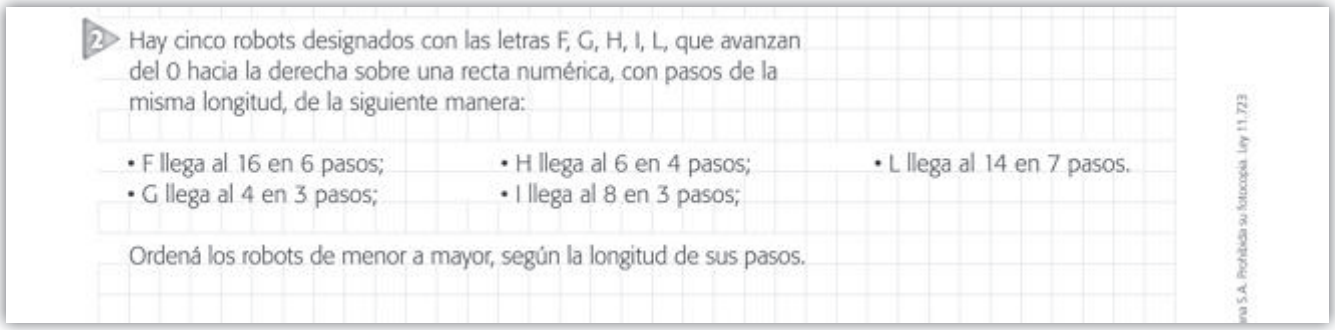
En el siguiente ejemplo se propicia un trabajo con varios problemas que implican establecer relaciones entre medidas de segmentos. La recta numérica servirá como soporte para analizar estas cuestiones y se propicia luego que los alumnos identifiquen la pertinencia de recurrir a la noción de fracciones equivalentes. Finalmente se profundizan estas relaciones en términos de subdivisiones de segmentos para compararlos:



1 Se tienen varias tiras. Todas las tiras de un mismo color tienen igual longitud. Si son de diferente color, son de distinta longitud. Sabiendo que:

- 6 tiras verdes miden lo mismo que 3 tiras rojas;
- 9 tiras amarillas miden lo mismo que 27 tiras rojas;
- 24 tiras celestes miden lo mismo que 18 tiras rojas;
- 20 tiras grises miden lo mismo que 12 tiras rojas,

ordená las tiras de la más larga a la más corta. Justificá tu respuesta.



2 Hay cinco robots designados con las letras F, G, H, I, L, que avanzan del 0 hacia la derecha sobre una recta numérica, con pasos de la misma longitud, de la siguiente manera:

- F llega al 16 en 6 pasos;
- G llega al 4 en 3 pasos;
- H llega al 6 en 4 pasos;
- I llega al 8 en 3 pasos;
- L llega al 14 en 7 pasos.

Ordená los robots de menor a mayor, según la longitud de sus pasos.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

3 Dos robots A y B salen del 0 y caminan hacia la derecha sobre una recta numérica. Los pasos de A miden $\frac{2}{3}$ de la unidad y los de B, $\frac{1}{6}$.

a) Si el robot A está parado en el 1 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

b) Si el robot B está parado en el 1 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

c) Si se colocan los dos robots en el 1 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

d) ¿Será cierto que la longitud del paso del robot B es $\frac{1}{4}$ de la longitud del paso del robot A?

4 Dos robots X e Y salen del 0. Los pasos de X miden $\frac{2}{3}$ de una cierta unidad, los de Y, $\frac{1}{5}$ de la misma unidad. A partir de estos datos señalen la o las afirmaciones verdaderas y las falsas.

a) ☐ X llega al 2 en 3 pasos.

b) ☐ Y llega al 1 en 5 pasos.

c) ☐ Si X da 9 pasos llega al mismo lugar que Y al dar 30 pasos.

d) ☐ Hay un solo número que pisan ambos robots.

5 Un robot A llega al 1 en 4 pasos. Otro robot B llega al 3 en 4 pasos.

a) ¿Cuál es la longitud de los pasos del robot A?

b) ¿Y la longitud de los pasos de B?

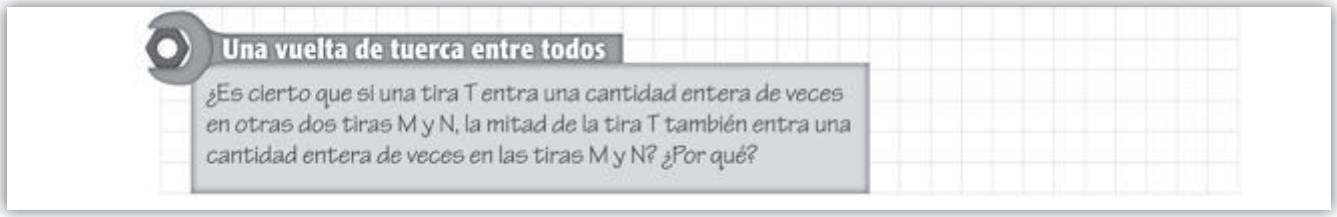
c) ¿Es cierto que A pisa en todos los puntos en los que pisó B?

d) ¿Cuál es la relación entre la longitud de los pasos de cada uno de los dos robots?

e) Un robot C da pasos más chicos que A y pisa en todos los puntos en los que pisó A. ¿Cuál puede ser la longitud de los pasos de C? Escribí tres longitudes posibles.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723



La exploración como parte del trabajo matemático

Si bien una de las características del trabajo matemático reside, como ya se indicó, en la resolución de diferentes tipos de problemas y la reflexión sobre los recursos elaborados para su resolución, hay otras marcas del trabajo matemático que se han considerado en este libro.

Frecuentemente, en la resolución de un problema, un primer intento no siempre conduce a "buen puerto". Es necesario realizar varios ensayos, identificar en qué consisten los errores que impiden arribar a la solución, buscar cierta información que puede estar involucrada en el trabajo que se propone y no fue considerada, recuperar determinados conocimientos que podrían asociarse con la nueva situación a resolver, etc. Se trata de un juego entre la anticipación de los recorridos de resolución y los efectos de las decisiones que se han ido tomando, de manera tal de sistematizar la búsqueda.

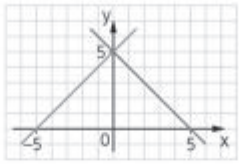
Para posibilitar tanto la exploración como la sistematización por parte de los alumnos es central el doble rol del docente: por un lado alienta el momento de búsqueda por medio de diversas estrategias, y por otro propone analizar los ensayos realizados, discutir a partir de los errores producidos, sistematizar los recursos que aparecieron, organizar los nuevos conocimientos elaborados y presentar un nuevo vocabulario si lo considera pertinente, nuevas formas de representación o nuevas relaciones. Hay un interjuego en la clase entre momentos que invitan a explorar, probar, ensayar... y otras instancias en las que el trabajo reflexivo se dirige a reordenar la búsqueda, a sistematizar.

Veamos un ejemplo sobre cómo en este libro algunos problemas iniciales alientan a este proceso exploratorio, y por medio de nuevas situaciones se busca comenzar a sistematizar el trabajo realizado:

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Rectas perpendiculares

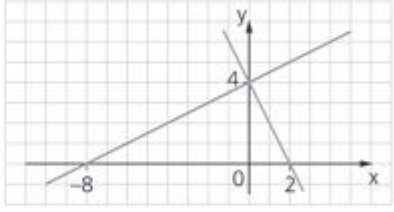
1 a) ¿Es cierto que las rectas que aparecen en el gráfico son perpendiculares? Justificá tu respuesta.



b) ¿Cambiaría tu respuesta si en lugar de cortar los ejes en los puntos que indica el gráfico, lo hicieran en (−6;0), (0;6) y (6;0)? ¿Y si lo hicieran en $(-\frac{1}{3};0)$, $(0;\frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3};0)$? Explicá cómo pensaste.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

2 ¿Son perpendiculares estas rectas? Explicá tu respuesta.



3 ¿Es cierta la siguiente afirmación? ¿Por qué?
"La pendiente de cualquier recta perpendicular a $y = 7 \cdot x + 9$ es negativa".

Para hacer en parejas

4 Analicen si los siguientes pares de rectas son perpendiculares o no.

a) $y = \frac{3}{4} \cdot x + 4$ $\quad$ $y = \frac{4}{3} \cdot x + 4$

b) $y = \frac{1}{4} \cdot x + 2$ $\quad$ $y = -4 \cdot x + 2$

c) $y = \frac{1}{4} \cdot x$ $\quad$ $y = -4 \cdot x + 2$

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Los modos de representación

Durante la exploración de un problema nuevo es esperable que los alumnos apelen al uso de dibujos, de ciertas representaciones gráficas o simbólicas, bosquejen cálculos, diagramas, etc. Estas formas de representación son un punto de partida para iniciar el trabajo. El docente podría alentar a sus alumnos a elaborar representaciones propias, aun cuando sean poco adaptadas a la situación que se trata de resolver. Ahora bien, en la clase resultará necesario debatir las diferentes maneras en que se representaron las situaciones a resolver y proponer un análisis sobre su fertilidad, pertinencia, conveniencia, validez. Avanzar sobre las formas de representación es parte de lo que se espera promover en el proceso de estudio de un concepto.

Es parte de la tarea docente ofrecer, si resulta conveniente o necesario, otras formas de representación para que los alumnos las incorporen progresivamente. Se trata de establecer relaciones entre las formas de representación que elaboran los alumnos y las elaboradas por la Matemática, cuestiones ambas que configuran parte del sentido de los conocimientos que se abordan.

Veamos un ejemplo en el cual se alienta a la búsqueda de modos de representación que aseguren, en este caso, la exhaustividad de un conteo:

1 En un campeonato de fútbol intervienen 5 equipos. Se eligen 3 de ellos para realizar un control médico a sus jugadores.

a) ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse la elección?

b) Para resolver la parte a), Enrique hizo este diagrama, designando con A, B, C, D y E a los equipos. Dice que si este esquema se hace 5 veces, una comenzando con A, otra con B, C, D y E (porque son 5 equipos), la selección puede hacerse de 60 maneras diferentes (porque $5 \times 4 \times 3 = 60$). ¿Estás de acuerdo con Enrique? Si creés que tiene razón, explicá por qué; si no, explicá cómo modificarías su respuesta.

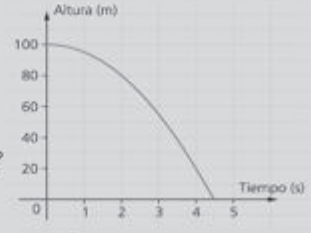
Y otro en el cual se propone tratar con formas de representación usadas en la Matemática, tanto representaciones gráficas como expresiones algebraicas.

Una vuelta de tuerca entre todos

Un objeto se deja caer desde una altura dada. El gráfico representa la altura a la que se encuentra en función del tiempo desde que comienza su caída.

- ¿Desde qué altura se dejó caer el objeto? ¿Cuánto tiempo tardó en llegar al suelo?
- ¿A qué altura se encontraba a los 2 segundos de comenzar su caída?
- ¿Cuál de estas fórmulas representa mejor la situación graficada? Consideren que A es la altura y T, el tiempo.

$A = 100 - 4{,}5 \cdot T$ $A = 100 + 5 \cdot T$ $A = 100 - 5 \cdot T^2$ $A = 100 + 5 \cdot T^2$



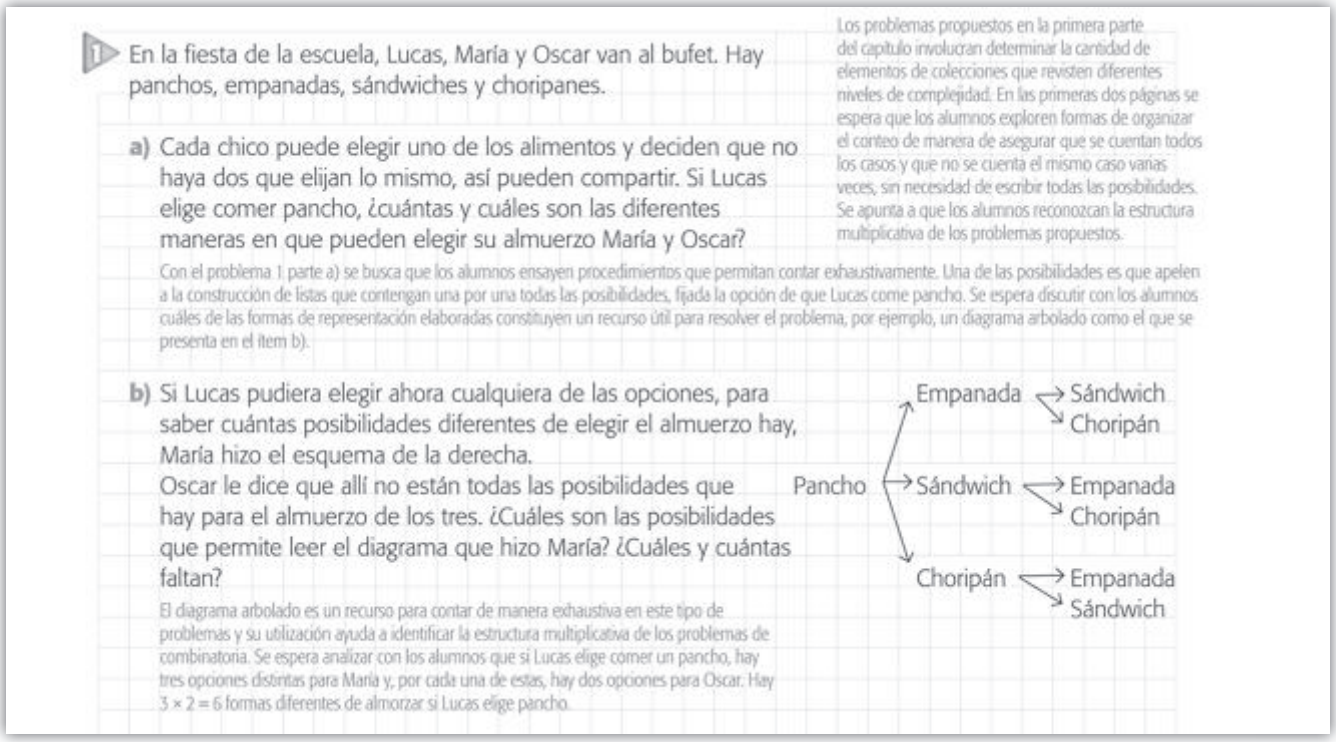
© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

La validación, un desafío crucial

Parte de lo que se pretende que asuman los alumnos como actividad matemática está asociada a la determinación de la validez de lo que se produce. En este sentido, se apunta a generar en la clase un tipo de trabajo matemático en el que los alumnos, paulatinamente, puedan "hacerse cargo", por sus propios medios, de la validez de los resultados que encuentran y de las relaciones que establecen. En un principio, es un objetivo que puedan despegarse de la mirada del docente en cuanto a si "está bien" o si "está mal" lo producido.

Se busca instalar como parte del trabajo del alumno la responsabilidad de verificar si lo realizado es correcto o no, mediante diferentes recursos. Este aspecto es quizás el más complejo de tratar en el desarrollo de las clases.

En algunas ocasiones los alumnos podrán constatar algunos resultados mediante recursos más próximos a lo empírico.



1 En la fiesta de la escuela, Lucas, María y Oscar van al bufet. Hay panchos, empanadas, sándwiches y choripanes.

a) Cada chico puede elegir uno de los alimentos y deciden que no haya dos que elijan lo mismo, así pueden compartir. Si Lucas elige comer pancho, ¿cuántas y cuáles son las diferentes maneras en que pueden elegir su almuerzo María y Oscar?

Los problemas propuestos en la primera parte del capítulo involucran determinar la cantidad de elementos de colecciones que revisten diferentes niveles de complejidad. En las primeras dos páginas se espera que los alumnos exploren formas de organizar el conteo de manera de asegurar que se cuentan todos los casos y que no se cuenta el mismo caso varias veces, sin necesidad de escribir todas las posibilidades. Se apunta a que los alumnos reconozcan la estructura multiplicativa de los problemas propuestos.

Con el problema 1 parte a) se busca que los alumnos ensayen procedimientos que permitan contar exhaustivamente. Una de las posibilidades es que apelen a la construcción de listas que contengan una por una todas las posibilidades, fijada la opción de que Lucas come pancho. Se espera discutir con los alumnos cuáles de las formas de representación elaboradas constituyen un recurso útil para resolver el problema, por ejemplo, un diagrama arbolado como el que se presenta en el ítem b).

b) Si Lucas pudiera elegir ahora cualquiera de las opciones, para saber cuántas posibilidades diferentes de elegir el almuerzo hay, María hizo el esquema de la derecha.
Oscar le dice que allí no están todas las posibilidades que hay para el almuerzo de los tres. ¿Cuáles son las posibilidades que permite leer el diagrama que hizo María? ¿Cuáles y cuántas faltan?

El diagrama arbolado es un recurso para contar de manera exhaustiva en este tipo de problemas y su utilización ayuda a identificar la estructura multiplicativa de los problemas de combinatoria. Se espera analizar con los alumnos que si Lucas elige comer un pancho, hay tres opciones distintas para María y, por cada una de estas, hay dos opciones para Oscar. Hay $3 \times 2 = 6$ formas diferentes de almorzar si Lucas elige pancho.

En otros casos se pone en el centro del trabajo del alumno la elaboración de argumentos o fundamentos apoyados en conocimientos matemáticos que permitan establecer la validez de los resultados alcanzados. Se trata entonces de proponer desafíos que demanden la elaboración de nuevos modos de "estar seguro" sin necesidad de apelar a recursos empíricos.

Así, en algunas ocasiones, se propicia la interpretación de explicaciones que dan cuenta de relaciones.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Una vuelta de tuerca entre todos

Lean entre todos el siguiente razonamiento que permite explicar por qué, si en un triángulo ABC como el del dibujo, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{AB}$, se verifica lo siguiente: si $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$ entonces $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$.

"El segmento DE es paralelo al lado AB del triángulo. Además, $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}$ y $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$.

Se sabe que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede escribir lo siguiente:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AD}+\overline{DC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}+\frac{\overline{DC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}+1$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BE}+\overline{EC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}+\frac{\overline{EC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}+1$$

Por lo tanto, es posible escribir la siguiente igualdad:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}+1=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}+1$. Y entonces: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$".

En otros casos se demanda a los alumnos la elaboración de justificaciones que expliquen los resultados alcanzados.

Para hacer en parejas

9 a) Si se suman cinco números consecutivos, ¿el resultado es múltiplo de 5? Justifiquen la respuesta.

b) Si se suman cuatro números consecutivos, ¿el resultado es múltiplo de 4? Justifiquen la respuesta.

Además de las razones más ligadas a las prácticas matemáticas, encontramos otras buenas razones para iniciar a los alumnos en procesos de validación por sus propios medios: fomentar una progresiva autonomía intelectual.

Hacia la generalización

Simultáneamente a la adquisición de conocimientos que les permitan dar cuenta de la validez o no, por sus propios medios, de los resultados obtenidos, se busca que los alumnos puedan involucrarse en la determinación de los alcances de los recursos y resultados que se van obteniendo. Es decir, inicialmente pueden determinar la validez de una afirmación o de un cálculo específico en función de un problema o un contexto particular. Se tratará entonces de promover la reflexión hacia el carácter más general de ciertas ideas que han circulado, llegando en algunos casos a establecer reglas válidas para cualquier caso. Por ejemplo:

Una vuelta de tuerca entre todos

Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Si un número es par, entonces es divisible por 4.
- Todo múltiplo de 12 es múltiplo de 3 y de 4.
- Todo múltiplo de 4 es múltiplo de 8.
- Todo múltiplo de 8 es múltiplo de 4.
- Todos los divisores de un número son infinitos.
- Todos los múltiplos de un número son infinitos.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En ocasiones se presentan problemas que demandan a los alumnos establecer niveles de generalidad. Por ejemplo, aquellos en los que es necesario dar cuenta de los alcances o dominios de validez de recursos de resolución, de cálculos, de propiedades que responden a preguntas como las siguientes: ¿pasará siempre?, ¿servirá para todos los números?, ¿esto sucederá con todos los cuadrados?, ¿habrá algún caso en que no se cumpla?, etc. Por ejemplo:

7 a) ¿Qué valor o valores debe tomar el número a para que $a \cdot 6 + 2$ sea múltiplo de 2?

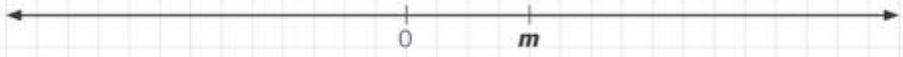
El trabajo vinculado a la generalización precisará ir creciendo hacia formas cada vez más elaboradas de fundamentar, avanzando en un terreno más deductivo asociado a la demostración.

El uso de las letras

Al tratar el problema de la generalización, las letras juegan un papel preponderante en el trabajo matemático para dar cuenta de relaciones que se verifican en un cierto dominio. No se trata de forzar la aparición y el tratamiento de las expresiones algebraicas, ni solo de resolver ecuaciones, sino de avanzar en la interpretación y el uso de expresiones que incluyen letras, así como de hacer jugar su potencialidad.

En algunas oportunidades se proponen problemas, para ser analizados y resueltos, en los que se propicia el uso de las letras para identificar un dominio de validez. Por ejemplo, en el tratamiento de los números:

5 En la siguiente recta numérica el número m es un entero. Marcá en la misma recta 2 múltiplos de m, uno a la izquierda del 0 y otro a la derecha.

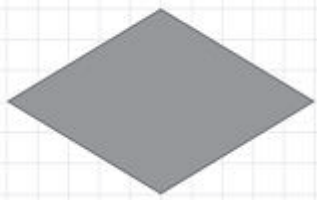


En otras oportunidades se recurre al uso de las letras para dar cuenta de una propiedad general:

Machete:
Si se tiene una colección de m elementos distintos, se llaman variaciones simples (sin repetición) de esos m elementos tomados de a n, a los grupos de n elementos distintos que se pueden formar, de manera que un grupo se diferencia de otro ya sea por los elementos que lo conforman o bien por el orden en que aparecen.
Las variaciones simples de m elementos tomados de a m se llaman permutaciones de m elementos. Una permutación se diferencia de otra solo en el orden, pues en todas aparecen los mismos elementos.

En ciertas ocasiones las letras permiten analizar cómo pueden variar los resultados que se obtienen al usar una fórmula, cuando se modifica alguno de sus componentes:

4 a) ¿Cómo cambia el área de este rombo si ambas diagonales se duplican?



b) ¿Y si una se duplica y la otra se reduce a la mitad?

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Otras veces se apela al uso de las letras para estudiar la relación entre variables o acompañar el estudio funcional.

3 Un submarino que está a 2.000 metros de profundidad comienza a moverse verticalmente hacia el fondo del mar. Durante la primera hora desciende cierta cantidad de metros; durante la segunda hora, desciende el doble que en la primera hora; en la tercera hora desciende 300 metros y se detiene a los 8.000 metros de profundidad.

a) ¿Cuál o cuáles de estas ecuaciones representan mejor el problema? ¿Por qué?

$2.000 - x - 2x - 300 = 8.000$ $\quad$ $2.000 + 3x + 300 = 8.000$ $\quad$ $3x = 6.000 - 300$

$2.000 + x + 2x + 300 = 8.000$ $\quad$ $2.000 - 3x - 300 = 8.000$ $\quad$ $3x + 300 = 6.000$

b) ¿Cuántos metros descendió en la primera hora?

Relaciones entre conceptos que aparentan ser independientes

Otro tipo de tarea que se propone en este libro –y que forma parte de la actividad matemática que se intenta propiciar– involucra la posibilidad de establecer relaciones entre conceptos que, aparentemente, no tienen relación entre sí, o la forma de relacionarlos no es evidente "a los ojos" de los alumnos. Con la intención de explicitar esas relaciones, se proponen diferentes momentos de trabajo en los cuales algunos conocimientos que ya han sido abordados, que han circulado y que los alumnos tienen en cierta forma disponibles, puedan comenzar a funcionar simultáneamente para tratar nuevos problemas. En algunas oportunidades serán el motor de una explicación, en otras servirán para reconocer "puentes" entre conceptos; en ocasiones serán herramientas para pensar recorridos de solución, e incluso podrán permitir la aparición de otros modos de representación.

Se trata de ir configurando una imagen del trabajo que permita a los alumnos identificar por qué todo ese andamiaje forma parte de una misma disciplina.

En el siguiente ejemplo se intenta poner de manifiesto las relaciones entre diferentes conocimientos matemáticos: el uso de las letras en el tratamiento de fórmulas para calcular áreas y propiedades de la multiplicación.

3 Un paralelogramo tiene base m y altura n. Si su altura se incrementa en 5, ¿cuál o cuáles de estas fórmulas permiten calcular el área del nuevo paralelogramo?

$A = m \cdot n + 5$

$A = m \cdot (n + 5)$

$A = m \cdot n + 5 \cdot m$

$A = m \cdot n + 5 \cdot n$

$A = 5 \cdot m \cdot n$

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

El uso de recursos tecnológicos

En varios capítulos de este libro se propone que los alumnos apelen a recursos tecnológicos que permiten también, bajo ciertas condiciones, que se enfrenten a desafíos en el mismo marco de trabajo que se enunció en páginas anteriores.

Por un lado se propicia el uso de la calculadora para diferentes tipos de tareas. En algunas oportunidades se propone usarla como medio de verificación de resultados obtenidos mediante otros recursos.

7 Encontrá todos los números primos que hay entre 1 y 31.

En otras oportunidades se recurre a la calculadora para explorar propiedades de las operaciones.

3 ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos permitirán ver en el visor de la calculadora la escritura 0.2 10 o alguna equivalente, según la calculadora que se use?

2×10^{10} $0{,}2 \times 10^{11}$ 20×10^{9} 20×10^{10} $0{,}02 \times 10^{8}$

Por otro lado, se apela a la computadora intentando preservar el mismo espíritu de trabajo que se viene proponiendo en estas páginas. Uno de los programas que se utiliza es el GeoGebra (de circulación libre). Se ofrecen dos páginas (159 y 160) para que los alumnos ensayen y aprendan sobre su funcionamiento.

En este libro se recurre a ese programa para tratar diferentes aspectos. Por un lado para explorar, analizar y debatir acerca de propiedades de las figuras a partir de problemas que involucran construcciones. Las validez de esas construcciones establecidas por el modo en que fue concebido el programa (es decir, una construcción será considerada correcta si al mover cualquiera de sus elementos sigue preservando las propiedades de lo que se dibujó) exige el despliegue de numerosas acciones que obligan a recurrir a las propiedades para lograr las construcciones. Veamos un ejemplo:

Para hacer en parejas con la compu

4 Usando el programa GeoGebra tracen una circunferencia de centro A y que pase por un punto B. Marquen sobre la circunferencia otro punto C de tal manera que el ángulo CAB sea recto en A. Marquen el triángulo ABC. ¿Será cierto que si la circunferencia se agrandara o se achicara, los triángulos ABC que quedarían formados con este procedimiento serían semejantes entre sí? ¿Por qué?

Por otro lado, el mismo programa habilita a tratar con las funciones y sus gráficos. En el siguiente ejemplo se propicia el análisis de ciertas características del gráfico de una función lineal:

Para hacer en parejas con la compu

5 a) Usen el programa GeoGebra para graficar una recta creciente que pase por el origen. Analicen cómo cambia el valor de la pendiente cuando modifican la inclinación de la recta.

b) ¿Cambiaría el análisis que hicieron en a) si la ordenada al origen fuera $y = -5$? ¿Y si fuera $y = 6$? ¿Y si fuera $y = b$, donde b es cualquier número real?

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En otras oportunidades se recurre al programa Excel, que habilita una nueva mirada sobre el trabajo con gráficos, en particular, los vinculados a la estadística. Se trata de ofrecer a los alumnos la posibilidad de iniciarse en el uso de este programa y de algunas de sus potencialidades no solo en la organización y la presentación de información sino asociada también al cálculo de algunos porcentajes y ciertas medidas estadísticas. Por ejemplo:

Para hacer en parejas con la compu

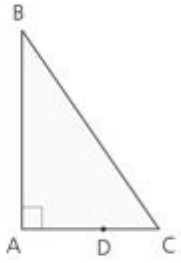
c) Usen el programa Excel para hacer un gráfico de barras en el que se represente la cantidad de varones y mujeres de cada departamento. ¿Se identifica de alguna manera si el porcentaje de mujeres es el mismo o no en todos los departamentos en el gráfico que realizaron?

Formas de organización y gestión de la clase

Diversas modalidades de organización de la clase son necesarias en función de las variadas formas que puede adquirir el trabajo matemático, del nivel de conocimientos que el problema involucra y del tipo de interacciones que se pretende promover. Entre las diversas modalidades se incluyen: individual, en parejas y colectivo.

En todos los capítulos hay una gran cantidad de problemas que se proponen para una exploración individual. Son espacios necesarios para que cada alumno, en un tiempo personal, pueda enfrentarse al o los problemas desde los conocimientos que tiene disponibles. Estos primeros acercamientos a la resolución serán puntos de partida para que el docente pueda organizar el análisis colectivo posterior. Por ejemplo,

a) El triángulo ABC es rectángulo, y el punto D está sobre el lado AC. Dibujá sobre ABC otro triángulo, ADE, con E en el lado AB, de manera que los triángulos ABC y ADE sean semejantes.



b) ¿Se puede asegurar, sin medir, que los segmentos DE y BC son paralelos? ¿Por qué?

También hay propuestas de trabajo individual en las páginas que llevan por título Una colección de problemas para estudiar que se proponen al finalizar cada capítulo. Están previstas para los tiempos individuales de estudio, de sistematización, o bien de volver a enfrentarse a las propias dificultades que pudieron haber estado presentes a lo largo del capítulo. Estos problemas podrían ser considerados como "tarea para el hogar", como repaso para prepararse para una evaluación escrita, como trabajo práctico para ser entregado y corregido por el docente, etcétera.

En otras oportunidades se sugiere abordar algunos problemas en parejas cuando se espera que las interacciones entre los alumnos sean fecundas para la circulación y la explicitación de los conocimientos que pudieran funcionar, y se encuentran próximos a las situaciones que se propone resolver. En estos casos, las actividades aparecen bajo el título: Para hacer en parejas.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Esta modalidad se adopta cuando la actividad adquiere un tinte más exploratorio y no se espera que pueda resolverse por completo de manera autónoma.

1 En el siguiente cuadro se registraron los pesos de los bebés nacidos a lo largo de un año en los hospitales de un pueblo.

Peso (en gramos)	Entre 2.000 y 2.500	Entre 2.500 y 3.000	Entre 3.000 y 3.500	Entre 3.500 y 4.000	Entre 4.000 y 4.500	Entre 4.500 y 5.000
Cantidad de niños recién nacidos	40	100	150	225	250	200

a) ¿Cuántos bebés nacieron en ese año?

En este libro, cuando un conjunto de datos se encuentra organizado en intervalos, el extremo superior de ese intervalo no está incluido en este, en tanto que el extremo inferior sí lo está. Esta condición vale para todos los intervalos, salvo para el último, en el que se consideran incluidos ambos extremos.

Para hacer en parejas

b) Armen un gráfico que permita representar los datos del cuadro.

c) El promedio del peso de los bebés recién nacidos es de, aproximadamente, 3.100 gramos. ¿Los nacimientos en este pueblo se corresponden con ese promedio?

d) Para representar los datos del cuadro se hizo el siguiente gráfico.

Machete:
Un histograma es un tipo de gráfico que se utiliza cuando la variable en estudio se considera agrupada en intervalos de valores consecutivos. La longitud de cada intervalo determinará el ancho de los rectángulos que forman las barras del gráfico; si estas longitudes son iguales, la altura de las barras estará determinada por la frecuencia de aparición de cada clase dentro del conjunto de valores.

También se propone este tipo de organización cuando la propuesta es más compleja y es posible que en el intercambio se acerquen a una estrategia o una respuesta más elaboradas, que en forma individual tal vez no podrían abordar. Por ejemplo:

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Para hacer en parejas

4. Encuentren, si es posible, un número decimal ***a***, de manera que el número ***a*** + *0,00001* tenga *la misma* cantidad de cifras decimales no nulas que ***a***.

5. Encuentren, si es posible, un número decimal ***a***, de manera que el número ***a*** + *0,00001* tenga *mayor* cantidad de cifras decimales no nulas que ***a***.

6. Encuentren, si es posible, un número decimal ***a***, de manera que el número ***a*** + *0,00001* tenga *menor* cantidad de cifras decimales no nulas que ***a***.

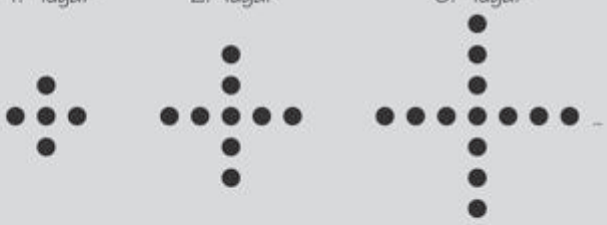
Hay momentos en los que se propicia un trabajo colectivo. Estas actividades aparecen bajo el título de Una vuelta de tuerca entre todos.

A veces la tarea que se propone involucra una complejidad aún mayor. Por ejemplo:

Una vuelta de tuerca entre todos

Cada dibujo de la siguiente secuencia de figuras está formado por puntos. En cada caso se agregan puntos para pasar a la figura que sigue.

1.er lugar 2.º lugar 3.er lugar



¿Es posible que exista una figura que tenga 2.001 puntos? Si creen que sí, identifiquen qué lugar ocupa. Si piensan que no, expliquen por qué.

En otros casos se pretende generar un mayor nivel de sistematización de conocimientos que han circulado, por ejemplo:

Una vuelta de tuerca entre todos

¿Es posible establecer cuántas fracciones con denominador 12 hay entre dos números enteros consecutivos, sin considerar esos números?

Otros momentos colectivos buscan instalar un proceso de generalización, por ejemplo:

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Una vuelta de tuerca entre todos

¿Es cierto que si una tira T entra una cantidad entera de veces en otras dos tiras M y N, la mitad de la tira T también entra una cantidad entera de veces en las tiras M y N? ¿Por qué?

También se prevén otras instancias de trabajo colectivo que se presentan bajo el título de Machete.

En algunas oportunidades se apela a ese título para establecer cierto vocabulario, símbolos o escrituras convencionales.

Machete:
Para escribir una multiplicación, se puede usar el símbolo x o bien, un punto (·).
Por ejemplo, $3 \times 2 = 3 \cdot 2$.
O bien $4 \times a = 4 \cdot a$.
A veces, cuando hay letras, tampoco se usa el punto: $4 \times a = 4 \cdot a = 4a$.

En otras ocasiones se usa para presentar una definición vinculada al trabajo que vienen desarrollando los alumnos.

Machete:
Cuando se relacionan dos variables es posible saber si una depende de la otra. Por ejemplo, si se considera la temperatura y la hora en que se registró, puede decirse que la temperatura depende del tiempo, ya que esta podría tomar diferentes valores dependiendo del momento del día. En este caso se dice que la temperatura es la variable dependiente y que el tiempo es la variable independiente.
En los gráficos la variable independiente suele representarse en el eje horizontal y la variable dependiente, en el vertical.

Machete:
En una función lineal representada por la fórmula $f(x) = m \cdot x + b$, cuyo gráfico es una recta, al número m (que multiplica a la variable x) se lo llama pendiente de la recta. La pendiente indica la variación del valor de $f(x)$ –es decir, de la variable y– cuando la cantidad x aumenta 1 unidad.
Si la pendiente es un número positivo, se dice que la función es creciente, dado que un aumento en 1 de la variable x implica un incremento de la variable y.
Si la pendiente es un número negativo, la función es decreciente, puesto que un aumento en 1 de la variable x implica una disminución de la variable y. La pendiente de la recta también puede ser cero; esto ocurre cuando la variable y mantiene siempre el mismo valor a pesar de la variación de la variable x, para todos los valores de x.
El número b (que se suma al término que contiene a la variable x) se llama ordenada al origen e indica cuál es el valor de la función (variable y) cuando el valor de la variable x es cero. En el gráfico, la ordenada al origen es el valor de y en el que la recta corta el eje de las ordenadas. Para encontrarlo basta considerar $x = 0$.

A veces se utiliza para definir alguna propiedad y eventualmente cierta explicación, también asociada a los problemas que se han tratado.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Roles del docente

Para que sea posible instalar un trabajo matemático se requiere que el docente despliegue diferentes tipos de prácticas según los momentos de la clase y del desarrollo del contenido en cuestión.

En muchos momentos la tarea principal es alentar a sus alumnos a que resuelvan los problemas por sus propios medios, o proponer algún recurso para que ciertos alumnos puedan empezar a enfrentarse a las situaciones propuestas. Es decir, el docente se enfrenta ante el desafío de sostener el trabajo de los alumnos, orientarlos sin dar respuestas, involucrarlos en el desafío, tener paciencia para no anticipar qué es correcto y qué no lo es, etcétera. En otras instancias les propone que expliciten los conocimientos y procedimientos utilizados. En ciertas oportunidades, organiza los debates a propósito de los conocimientos en juego y promueve la difusión de esos conocimientos (aunque sean producidos solamente por algunos).

A veces genera espacios de análisis de procedimientos y soluciones erróneas (aunque sean solo de algunos alumnos) para promover avances para todos, o bien somete a discusión una nueva estrategia que no ha sido utilizada para resolver un problema.

El docente es quien, además, aporta información cuando se requiere para que los alumnos puedan retornar al problema. Puede registrar en el pizarrón aquello que es nuevo para que pueda ser reutilizado y también es responsable de evocar lo realizado en clases anteriores para establecer la continuidad entre lo hecho y lo que está por realizarse. Es también función del docente presentar conjuntos de problemas que permitan sistematizar, reutilizar o ampliar lo aprendido.

En este libro se presentan algunas orientaciones asociadas a los problemas que se proponen, a discusiones que se podrían propiciar en función de algún aspecto específico de un conocimiento que se está poniendo en juego, a instancias de trabajo en parejas o con todo el grupo. Se trata de contribuir a prever los diferentes roles en torno a cada uno de los contenidos abordados en los capítulos. Este material se presenta como texto comentado en cada página del libro del docente.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

2. El tratamiento de los contenidos en *Matemática en 2.º/ 3.º*

Este libro está organizado en once capítulos. Cada uno de ellos se inicia con una portada que presenta alguna historia, un comentario o una anécdota relacionados con alguno de los conceptos que forman parte del capítulo. Esta portada puede leerse en grupo junto con la viñeta humorística que se presenta asociada al texto.

A continuación se presentan aquellos aspectos centrales de cada capítulo.

Capítulo 1: Números enteros

Este capítulo se inicia con una colección de problemas que tiene por finalidad que los alumnos recuperen las ideas de múltiplo y divisor, y que retomen las relaciones entre uno y otro concepto a partir de vincularlos con la idea de división. Se busca a su vez caracterizar los múltiplos de un número k a partir de escrituras del tipo $k \times m$ (en un principio con m número natural).

Se continúa con nuevos problemas que se proponen tratar con la idea de número primo y desarrollar un trabajo exploratorio acerca de sus características. Se trata, a partir de allí, de hacer explícita la descomposición multiplicativa en factores de una cifra, en particular, apelando a números primos.

Se avanza con nuevos problemas que ponen en el centro el reconocimiento de que las escrituras matemáticas brindan información y que su lectura permite anticipar algunos resultados sin necesidad de recurrir a los cálculos. En este tipo de situaciones, el resto de una división se pone en juego, a partir de las ideas de divisores y múltiplos.

Nuevos problemas ponen el acento en el análisis de la estructura de un cálculo para decidir cuestiones de divisibilidad con números naturales. De allí se avanza en el trabajo con escrituras algebraicas que simbolizan algunas de las relaciones establecidas. Se busca que los alumnos aprendan a leerlas, interpretarlas y producirlas.

Posteriormente se busca extender al campo de los números enteros algunas de las ideas abordadas con los números naturales. Algunas situaciones involucran tratar con divisiones, pero en este caso con enteros negativos.

Se cierra el capítulo proponiendo a los alumnos situaciones que involucran procesos de generalización de algunas relaciones establecidas en el campo de la divisibilidad. No se trata de que resuelvan ecuaciones o desarrollen un despliegue algebraico sino que puedan explorar las condiciones de validez de ciertas expresiones propuestas y poner en juego algunas propiedades de los números enteros.

Capítulo 2: Problemas de conteo y fórmulas

Los problemas propuestos en la primera parte de este capítulo involucran determinar la cantidad de elementos de colecciones que revisten diferentes niveles de complejidad. Las primeras situaciones buscan que los alumnos exploren formas de organizar el conteo de manera de asegurar que se consideren todos los casos y que no se cuente el mismo caso varias veces, sin necesidad de escribir todas las posibilidades. Se apunta a que los alumnos reconozcan la estructura multiplicativa de los problemas propuestos.

Posteriormente se proponen nuevos problemas de manera tal de que los alumnos avancen o profundicen en el reconocimiento de esa estructura multiplicativa. Se trata de analizar problemas que involucran variaciones simples, permutaciones y variaciones con repetición.

Una vuelta sobre este tipo de problemas propicia la identificación de aquellos aspectos centrales que se ponen en juego en los problemas de combinatoria: la posibilidad de repetir o no los elementos de la colección y la necesidad de considerar o no el orden en que aparecen los elementos de la colección. Posteriormente se presentan otros problemas que involucran la producción de fórmulas para contar los elementos de una colección. Se apunta a la elaboración, por parte de los alumnos,

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

de una variedad de expresiones algebraicas diferentes con el objeto de trabajar cuestiones de equivalencia. Apoyarse en los contextos propuestos en cada problema permitirá discutir sobre las particularidades de cada fórmula y las diferentes expresiones algebraicas que hacen posible describir o establecer el conteo. Si bien es esperable que los alumnos evalúen las distintas fórmulas en casos particulares –constatando de este modo que dan la misma cantidad y apoyándose en este hecho para dar cuenta de la equivalencia– se busca avanzar hacia la noción más genérica: las fórmulas son equivalentes porque cuentan lo mismo.

Finalmente, se tratará de que los alumnos puedan apoyarse en las propiedades de los números y de las operaciones para analizar la equivalencia entre fórmulas que aparentan ser diferentes.

Capítulo 3: Áreas de figuras

Se inicia el capítulo con algunos problemas que buscan recuperar con los alumnos la idea de medir el área de una figura utilizando unidades no convencionales, en términos de "cuántas veces entra" la unidad elegida como medida en la figura.

Otros problemas que apelan a la misma idea demandan comparar áreas, aun si no se dispone de fórmulas para calcularlas. Se busca que los alumnos se involucren con la posibilidad de descomponer las figuras para compararlas por partes, o para componerlas de modos más convenientes para realizar la comparación.

Posteriormente se proponen nuevas situaciones que apuntan a que los alumnos identifiquen —o recuperen del trabajo de años anteriores— que el área de un triángulo es la mitad del área del rectángulo que tiene su misma base e igual altura. Además, se busca analizar que, aunque los triángulos tengan diferente forma, el área puede ser la misma.

Luego se avanza hacia la producción y el uso de fórmulas que permitan comparar áreas de triángulos y cuadriláteros. El eje del trabajo pasa por las relaciones que se puedan establecer entre triángulos y rectángulos.

Otras situaciones favorecen el uso de expresiones algebraicas así como la determinación de ciertas equivalencias al servicio de la comparación de áreas en cuadriláteros y triángulos. Se propone que los alumnos apelen a la producción y al uso de fórmulas.

Nuevos problemas implican el estudio de la variación del área de triángulos y cuadriláteros en función de cómo varían sus elementos. Se trata de que los alumnos puedan vincular los resultados de los cálculos en función de las variaciones que pudiera sufrir una figura.

Se cierra el capítulo con problemas de la misma naturaleza que los recientemente descriptos, pero proponiendo a los alumnos el tratamiento con diferentes fórmulas que permiten dar cuenta de las variaciones.

Capítulo 4: Números racionales

Este capítulo se inicia con una colección de problemas en los cuales las fracciones aparecen asociadas a la proporcionalidad. La equivalencia entre fracciones aparecerá como un recurso pertinente para comparar diferentes situaciones proporcionales.

Se continúa profundizando aspectos que hacen al tratamiento del orden entre expresiones fraccionarias. Para ello, la recta numérica resulta una herramienta sumamente útil. Se trata de establecer criterios que permitan comparar fracciones sin apelar exclusivamente al "producto de los extremos y el producto de los medios".

Se continúa con otros problemas que ponen en el centro del debate la conmensurabilidad entre segmentos. Las fracciones son un recurso ideal para tal fin, así como los criterios de orden estudiados

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

con anterioridad. Se avanza hacia el establecimiento de la idea de que una subdivisión de un segmento, que entre una cantidad entera de veces en ese segmento, necesariamente va a entrar también otra cantidad entera de veces en los otros segmentos que conllevan proporciones con el primero.

Posteriormente se proponen problemas que buscan que los alumnos se enfrenten con los conceptos de redondeo y truncamiento con la finalidad de poder aproximar decimales.

Luego se presentan nuevas situaciones que buscan trabajar aspectos conceptuales de la potenciación y analizar la economía de las escrituras que procura la notación científica. No se apunta a la realización de cálculos muy complejos. La calculadora pasa a ser una herramienta casi imprescindible.

Nuevos problemas permiten recuperar las ideas relacionadas con el orden entre expresiones fraccionarias, pero esta vez tienen por objetivo que los alumnos desarrollen estrategias que les permitan encontrar fracciones entre otras dadas.

El capítulo finaliza con problemas que ponen en el centro la propiedad de densidad en el conjunto de números racionales.

Capítulo 5: Función lineal y su comportamiento

Este capítulo se inicia con una colección de problemas que ponen en el centro la noción de relaciones entre variables, en particular aquellos aspectos concernientes a sus diversos modos de representación: gráficos, tablas, fórmulas. Se trata de introducir la idea de que cada modo de representar relaciones entre variables permite identificar algunos aspectos en tanto que podría dificultar la posibilidad de destacar otros.

Se continúa con nuevos problemas que ponen en debate la identificación de diversas informaciones que pueden "leerse" o deducirse a partir de la representación gráfica de la situación que se propone estudiar.

El capítulo avanza introduciendo la noción de función a partir del estudio de procesos que varían. Nuevamente, las diferentes formas de representar las funciones entran en escena.

Otros problemas ponen en discusión el análisis en torno a la identificación de situaciones en las que las variaciones de las cantidades involucradas pueden considerarse uniformes, y en qué circunstancias es posible aprovechar este tipo de variación para anticipar el comportamiento de las variables en juego. Se busca arribar a la idea de función lineal como modelo de variación uniforme.

Posteriormente se abordan problemas que permiten reconocer las condiciones a partir de las cuales un punto pertenece al gráfico de una función lineal así como la caracterización de la recta asociada a la función lineal. Estas cuestiones se relevan a partir de las escrituras de las fórmulas, las representaciones gráficas y las relaciones entre unas y otras.

Se avanza luego con el tratamiento de ecuaciones lineales teniendo como soporte la noción de función lineal. Se propone trabajar con ecuaciones que contengan una o más variables, y eventualmente valores constantes.

El capítulo finaliza con diferentes tipos de problemas que ponen de manifiesto la noción de proporcionalidad inversa.

Capítulo 6: Semejanza y teorema de Thales

Este capítulo se inicia con algunos problemas que intentan recuperar las relaciones entre triángulos y circunferencias que los alumnos pudieron haber estudiado en años anteriores, o bien tengan la oportunidad de conocerlas, si nunca las han analizado, a partir de construcciones con regla y compás. Se trata de identificar la relación entre datos y cantidad de soluciones posibles en cada construcción, a partir de las propiedades que se podrían poner en funcionamiento, tanto de triángulos como de circunferencias.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

El capítulo continúa con nuevos problemas que proponen una aproximación a la noción de semejanza de triángulos a partir de construcciones dados ciertos datos, para luego establecer algunos de los criterios más usuales.

Se continúa con nuevos problemas que buscan profundizar en el estudio de las condiciones que garantizan la semejanza de triángulos en términos de la igualdad entre sus ángulos. El análisis de los problemas apunta a la elaboración de la relación entre los lados homólogos proporcionales y el concepto de razón de semejanza.

Posteriormente se pone en debate la elaboración y el análisis de condiciones mínimas que permitan garantizar la semejanza de triángulos.

El capítulo continúa con el estudio de la noción de segmentos proporcionales como medio para la introducción al teorema de Thales.

Otras situaciones proponen recurrir a nuevos usos del teorema en el marco de la división de un segmento en partes proporcionales. Estas cuestiones permiten avanzar hacia la idea de base media.

El capítulo finaliza con problemas que ponen en el centro la noción de razón de semejanza entre perímetros y áreas de triángulos semejantes.

Capítulo 7: Números racionales y números reales

Este capítulo se inicia con una colección de problemas que busca recuperar la noción de potencia de exponente natural, apoyada en la de multiplicación entre racionales.

Posteriormente se amplía el universo a las propiedades de la potenciación con exponente entero, en el conjunto de los racionales, para arribar al desafío de interpretar la potencia con exponente fraccionario. Diferentes cálculos y el uso de la calculadora buscan dotar de sentido a las escrituras y las relaciones entre potencias con exponente fraccionario y las raíces.

Se continúa el trabajo con cálculos que ponen de manifiesto el tratamiento con raíces de distinto índice. Se busca diferenciar las soluciones posibles de una ecuación de segundo grado de la idea de raíz cuadrada.

Problemas nuevos motorizan el análisis de las propiedades de potencias y raíces buscando poner el foco en la conveniencia de expresar las raíces como potencias para poder utilizar sus propiedades. Se trata de avanzar en el uso de las propiedades de las potencias y las raíces para la resolución de cálculos.

Posteriormente se introduce la noción de número irracional. El teorema de Pitágoras servirá de soporte para tal fin y se propone analizar las transformaciones que permiten arribar a diferentes modos de expresar números irracionales.

Para finalizar se proponen problemas que demandan tratar con estos números en la recta numérica, concluyendo con una demostración de la imposibilidad de escribir $\sqrt{2}$ como número racional.

Capítulo 8: Función lineal y ecuación de la recta

Los primeros problemas de este capítulo dan continuidad al trabajo iniciado en el capítulo 5. Se trata de una primera etapa de revisión de lo hecho y analizado en aquella oportunidad para retomar las nociones de función lineal y ecuación de la recta.

Nuevos problemas ponen en el centro de atención la noción de rectas paralelas. En algunas oportunidades se trata de que las dificultades que podrían aparecer en la construcción de gráficos no obstaculicen el objetivo central de los problemas, referido al análisis de las pendientes de las rectas en sus representaciones gráfica y algebraica para la identificación y el estudio de este tipo de funciones.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

El mismo tratamiento se propone para el caso de las rectas perpendiculares, pero en esta oportunidad, los problemas promueven el uso de razonamientos geométricos que superen los argumentos empíricos o perceptivos "identificables" en los gráficos de rectas perpendiculares. El análisis se centra en la intersección de las rectas con los ejes, para trabajar con los dos triángulos rectángulos que quedan determinados. La semejanza servirá como soporte para tal fin.

Se continúa con nuevos problemas que demandan construir rectas a partir de ciertos datos, tanto desde su gráfico como desde su fórmula y las relaciones que se podrían establecer entre estas representaciones.

Posteriormente se avanza en el tratamiento de ecuaciones lineales con una incógnita. Un aspecto que se destaca es la posibilidad de utilizar el gráfico cartesiano como referencia para la resolución de este tipo de ecuaciones. Se propicia el análisis de la ubicación de puntos sobre la recta como recurso que permite estimar un valor aproximado de la incógnita. Estos problemas ponen de manifiesto la posibilidad de modelizar con ecuaciones lineales.

Se avanza luego en el análisis de las condiciones que determinan infinitas soluciones, una solución o ninguna. Estas cuestiones vienen asociadas a la noción de conjunto solución en términos de ecuaciones equivalentes. Se trata de que los alumnos hagan funcionar la idea de que para que dos ecuaciones sean equivalentes, deben tener el mismo conjunto solución.

Capítulo 9: Estadística y probabilidad

Se inicia el capítulo con una serie de problemas que ponen en el centro las nociones de muestra, población y variable. La intención es que los alumnos se vinculen con el tratamiento de información organizada en cuadros y gráficos. A su vez se trata de discutir la diferencia entre trabajar con toda la población o con una muestra.

Nuevos problemas promueven el trabajo con otras maneras de organizar la información distinguiendo entre datos presentados de manera discreta y datos presentados en intervalos continuos.

El capítulo continúa con situaciones que demandan tratar con medidas de tendencia central, diferenciando también estos conceptos cuando se trata de variables discretas o continuas.

Se continúa con problemas que introducen la noción de probabilidad de un suceso, debatiendo en torno a la certeza o no de un resultado. Se trata de introducir la noción de experimento y de azar como una nueva característica del trabajo matemático. La idea de probabilidad podrá surgir a la luz de la tarea desplegada. En este marco se aborda la noción de resultados posibles, destacando la exhaustividad y el hecho de no considerar dos veces el mismo resultado, arribando a la noción de probabilidad de un suceso.

Nuevos problemas propician el cálculo de probabilidades, avanzando hacia la determinación de probabilidades totales. El recurso de cuadros o diagramas de árbol será recurrente para dar cuenta del análisis de todo el espacio muestral.

Se finaliza con problemas que introducen las nociones de probabilidad compuesta y probabilidad condicional.

Capítulo 10: Función lineal y sistemas de ecuaciones lineales

Se inicia el capítulo con una colección de problemas que dan continuidad al trabajo iniciado en el capítulo 8. Será interesante que el docente propicie la revisión de lo hecho y analizado en aquella oportunidad para la resolución de los problemas que aquí se presentan.

A su vez se propone el análisis de que un determinado valor de la variable es solución de una ecuación lineal.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

El trabajo con ecuaciones lineales vuelve a poner de manifiesto la noción de equivalencia entre ecuaciones a partir de las transformaciones algebraicas que se operen.

Se avanza luego con el tratamiento de problemas con varias ecuaciones. Se trata de propiciar un debate que habilite al uso de diferentes recursos, como tablas, gráficos o ecuaciones. Este trabajo desemboca en la noción de sistemas de ecuaciones. Una vez más, la noción de sistemas equivalentes ocupa la escena central, así como el análisis de que cualquier solución de un sistema de ecuaciones es solución de cualquiera de los sistemas equivalentes obtenidos mediante transformaciones algebraicas.

En el marco de este trabajo surge la posibilidad de apelar a gráficos como recurso anticipatorio de las soluciones encontradas.

Se ha privilegiado el estudio de expresiones sencillas de modo que los alumnos puedan enfocarse en las relaciones matemáticas entre los números y controlar los pasos de los razonamientos, sin "enredarse" en cálculos complejos o transformaciones algebraicas dificultosas.

El capítulo incluye el tratamiento de la representación gráfica de sistemas de ecuaciones también para estimar soluciones y controlar procedimientos algebraicos.

Se continúa con nuevos problemas que demandan analizar la cantidad de soluciones de un sistema. En este tipo de problemas resulta central la identificación en las transformaciones algebraicas sobre el sistema de aquellas expresiones que permite hacer "visible" la igualdad entre las pendientes de las rectas. Se trata de reconocer la presencia de rectas paralelas a partir de sus pendientes y ordenadas al origen antes de embarcarse en las técnicas de resolución. Será interesante que los alumnos aprendan a disponer de recursos de anticipación, de modo de evitar que la resolución de ecuaciones se convierta en un procedimiento puramente mecánico.

El capítulo finaliza con problemas que ponen en juego la identificación de una solución, infinitas soluciones, o ninguna solución.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Capítulo 11: Función cuadrática

Este último capítulo se inicia con una serie de actividades que involucran estudiar procesos que pueden modelizarse apelando a expresiones cuadráticas. Se busca que los alumnos se enfrenten al desafío de elaborar fórmulas que permitan estudiar variaciones

Se continúa con nuevos problemas que demandan analizar y elaborar diferentes modos de representar las relaciones entre variables tratadas previamente para arribar a la noción de función cuadrática.

Nuevos problemas promueven el estudio del comportamiento de este tipo de funciones en términos de crecimiento y decrecimiento. Se trata, en un principio, de distinguir el modo en que varía una función cuadrática del modo en que varía una función lineal.

Se avanza luego en el tratamiento de los gráficos de las funciones cuadráticas, el análisis de sus vértices y ejes de simetría. La intención de los problemas es que los alumnos exploren las variaciones en los gráficos de la función cuando se producen variaciones sobre la ecuación, y viceversa. En el marco de los gráficos se presentan problemas que involucran el recurso de ecuaciones de segundo grado incluyendo la noción de cero de una función cuadrática, así como las ideas de positividad y negatividad.

Bibliografía recomendada

Barallobres, G. Algunos elementos de la didáctica del álgebra, Universidad V. de Quilmes, 2000.

Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. Abordajes al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza.

Berté A. Matemática dinámica. Buenos Aires. A-Z editora, 2005.

Block, D. Estudio didáctico sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN. México, 1987.

Brousseau, G. Iniciación al estudio de la Teoría de las situaciones didácticas. Editorial Libros del Zorzal, 2007.

Centeno Pérez, J. Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Ed. Síntesis, 1988.

Chevallard Y, Bosch M, Gascón J. Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Barcelona. Horsori Editorial, 1997.

Dantzing T. El número, lenguaje de la ciencia. Hobbs Sudamericana,1971.

Dirección General de Cultura y Educación. Diseño Curricular Segundo ciclo. Pcia. de Buenos Aires, 2008. [Disponible en www.abc.gov.ar].

Dirección de Educación General Básica. Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en EGB. Pcia. de Buenos Aires, 2001.
[Disponible en www.abc.gov.ar]

Dirección de Educación General Básica. Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB. Gabinete Pedagógico Curricular –Matemática–. Pcia. de Buenos Aires, 2001.

Dirección de Educación General Básica. Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB. Pcia. de Buenos Aires, 2001.
[Disponible en www.abc.gov.ar].

Dirección de Educación General Básica. Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB. Pcia. de Buenos Aires, 2001.
[Disponible en www.abc.gov.ar].

Dirección General de Cultura y Educación. División en 5º y 6º año de Escuelas Primarias. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Pcia. de Buenos. Aires, 2007.
[Disponible en www.abc.gov.ar].

Douady R y Perrin Glorian MJ. Investigaciones en didáctica de matemática. Áreas de superficies planas en cm y en 6to, 1a parte. Revista Hacer Escuela Nº 9, 1992.

Douady R y Perrin Glorian MJ. Investigaciones en didáctica de matemática. Áreas de superficies planas en cm y en 6to, 2a parte. Revista Hacer Escuela Nº 11, 1992.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Diseño Curricular Segundo Ciclo, 2004.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Documento de actualización curricular N° 5, 1998.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Cálculo Mental con Números Naturales. Apuntes para la enseñanza, 2006.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Aportes para el desarrollo Curricular. Matemática: Acerca de los números decimales: una secuencia posible, 2001.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Fracciones y Números decimales. Apuntes para la enseñanza de 4º a 7º, 2006.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Cálculo Mental con Números Racionales. Apuntes para la enseñanza, 2006.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Matemática. Números Racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio, 2006.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Programas de Matemática para 1º y 2º años de Nivel Medio, 2002.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Dirección de Currícula y Enseñanza. Programas de matemática 1º a 5º años de Escuelas Secundarias, 2009.
[Disponible en: www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula Documento de Actualización Curricular para 7º grado, 2000.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Aportes para la enseñanza. Nivel medio. Matemática. Geometría, 2007.
[Disponible en www.buenosaires.gov.ar].

Itzcovich H. Iniciación al estudio didáctico de la geometría. Ed. Libros del Zorzal, 2005.

Panizza M, Sadovsky P. El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos. FLACSO y Ministerio de Educación de la Pcia. de Santa Fe.

Panizza M. Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos. Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2005.

Panizza M, Sadovsky P, Sessa C. La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. En: Enseñanza de las Ciencias, Vol 17, Nro 3, pp. 453-461, 1999.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Panizza M, Sadovsky P, Sessa C. Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha. Trabajo presentado en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina - REM, Rio Cuarto, octubre de 1995.

Panizza M, Sadovsky P, Sessa C. Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito. [Disponible en www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/pss_1996.doc].

Parra C. "Cálculo mental en la escuela primaria". En: Parra y Saiz (comp.). Didáctica de matemáticas. Buenos Aires. Paidós, 1994.

Quaranta ME, Wolman S. "Discusiones en las clases de matemática: qué se discute, para qué y cómo". En: Panizza (comp.). Enseñar matemática en el Nivel Inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y Propuestas. Paidós, 2002.

Segal S, Giuliani D. Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades. Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2008.

Sadovsky P. "La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática". En: Alagia H, Bressan A y Sadovsky P. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2005.

Sadovsky P. Enseñar Matemática hoy. Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2005.

Sessa C. Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Ed. Libros del Zorzal, 2005.

Vergnaud G. El niño, las matemáticas y la realidad, el problema de las matemáticas en la escuela. México. Trillas, 1991.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723