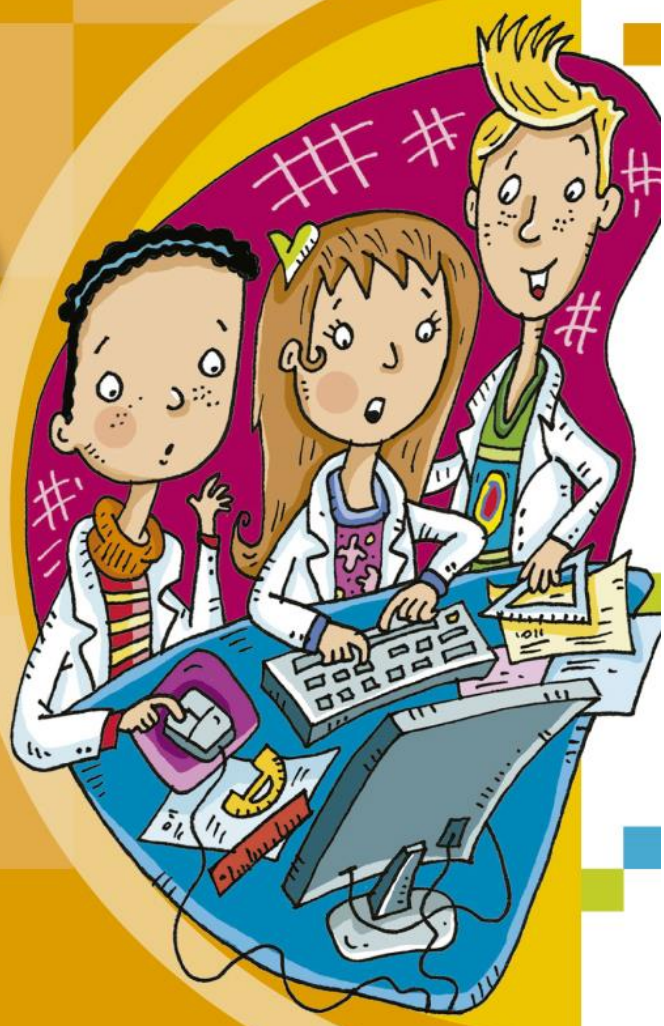
Los matemáticos de 6.º



Operaciones y divisibilidad

SANTILLANA

Operaciones y divisibilidad

I. Aspectos centrales del tratamiento de los contenidos propuestos

El capítulo 1, “Repasar quinto”, habilita un espacio para la evocación de los diversos conocimientos vinculados con las operaciones que pudieron haber circulado, tanto dentro como fuera de las aulas, en los años anteriores. Los capítulos 3, 5 y 7, a los que haremos referencia en estas páginas, buscan retomar esos conocimientos, difundirlos, actualizarlos y hacerlos evolucionar a partir de explorar, analizar y comparar diversas estrategias de cálculo; de resolver problemas que presentan nuevos sentidos de la multiplicación y la división, y de avanzar en el estudio y la explicitación de las propiedades de las operaciones.

Si bien el trabajo en torno a las estrategias de cálculo está estrechamente vinculado al estudio de los diversos sentidos de las operaciones, se realiza, a su vez, un trabajo específico respecto de ellas. En estos capítulos se incluyen situaciones variadas en las que se abordan el cálculo mental, algorítmico, aproximado y con calculadora.

Una de las propuestas que recorre los capítulos 3 y 5 apunta a ampliar y utilizar un repertorio de cálculos de multiplicaciones y divisiones. En otras ocasiones se propone elaborar, analizar o comparar descomposiciones de cálculos, o bien identificar y usar cálculos conocidos que pueden ser puntos de apoyo para resolver otros desconocidos. Un lugar privilegiado se le otorga a la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, asociado al análisis de regularidades y relaciones con el sistema de numeración, por considerarla punto de apoyo tanto para resolver otros cálculos como para estimar productos y cocientes.

La relevancia del trabajo en relación con el cálculo estimativo y aproximado radica en el interés porque se constituya, progresivamente, en una herramienta de anticipación y control de los resultados de los cálculos que se realizan. En esta misma línea, la introducción de la calculadora permitirá mayor autonomía entre los alumnos, que podrán verificar resultados, a la vez que agiliza la resolución de los cálculos cuando el acento está puesto en otro aspecto. El trabajo en torno de las propiedades de las operaciones se convierte en una nueva oportunidad para profundizar el estudio de la multiplicación y la división.

La propuesta con la que se inicia el capítulo 3 introduce el estudio de las propiedades de las operaciones, que se retoma y profundiza en su transcurso. En la portada se somete a discusión un conjunto de afirmaciones, cuya verdad o falsedad deberán ser determinadas por el conjunto de la clase. Al finalizar el capítulo, los alumnos podrán volver a esta página inicial y avanzar en la justificación de sus respuestas apoyándose en las propiedades estudiadas. Este trabajo apunta no solo a ajustar los conocimientos que circulan sino a darles la oportunidad de tomar conciencia de sus propios avances.

Las propiedades de la multiplicación se abordan en las páginas 31 y 32, mientras que las de la división son objeto de trabajo en las páginas 33 y 34. Las páginas 35 y 36 permiten poner en juego las propiedades

estudiadas. En ellas también se introduce un nuevo recurso, la calculadora científica, con la intención de poner de relieve no solo cuestiones ligadas a las propiedades de las operaciones, sino también al orden en que se resuelven. El docente deberá tener en cuenta las diferencias entre la calculadora común y la científica: la primera no respeta la jerarquía de las operaciones sino que va realizando los cálculos a medida que se introducen. Será interesante que los alumnos exploren cómo la calculadora científica, en cambio, sí respeta el orden en el que deben realizarse los cálculos. Si los alumnos utilizaran la calculadora común, el docente deberá proponerles que escriban los resultados de los cálculos parciales. Por ejemplo, en el problema 5 de la página 34 se trata de hacer explícita la convencionalidad para resolver las operaciones en cierto orden, ya que, si no hay paréntesis, se debe hacer 544 : 8 = 68 y 68 : 2 = 34, y no 8 : 2 = 4 y luego 544 : 4 = 136. Será necesario recordar que cuando las operaciones son de igual jerarquía, se resuelven de izquierda a derecha, decisión que resulta de una convención matemática.

5. Al hacer 544 : 8 : 2, Adriana obtuvo 34 y Susana, 136.

a) ¿Qué cálculos creés que habrá realizado cada una para alcanzar resultados tan distintos?

b) ¿Quién obtuvo el resultado correcto?

Esta cuestión se retoma y explicita en las páginas 63 y 64 del capítulo 5. Como, por ejemplo, en el siguiente problema:

1. Para resolver 4 + 8 × 9 : 3, Tomás usó una calculadora común y obtuvo 36 como resultado.
En cambio, Cecilia usó una calculadora científica y le dio 28. Explicá cómo resuelve la cuenta cada calculadora.
¿Cuál es la forma que conduce al resultado correcto?

En la página 26 del capítulo 3 se propone un conjunto de actividades que ponen en juego estrategias de cálculo mental y estimativo de multiplicaciones y divisiones, incluidos problemas que apuntan a utilizar resultados conocidos para resolver otros cálculos. Las estrategias convocadas se apoyan en las características del sistema de numeración y en las propiedades de las operaciones. Por ejemplo, el problema 2 de esa misma página apunta a poner en juego la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, y extenderla a otros múltiplos de 10, 100 y 1.000.

2. Resolvé los siguientes cálculos mentalmente y luego verificá los resultados con la calculadora.

5.000 × 10 =	5.000 × 20 =	5.000 × 50 =
500 × 100 =	5.000 × 200 =	5.000 × 500 =
600 : 10 =	600 : 20 =	600 : 30 =
6.000 : 100 =	6.000 : 200 =	6.000 : 300 =

En un espacio de trabajo colectivo a partir de este mismo problema, los alumnos podrán detenerse a analizar las razones por las cuales en algunos cálculos que son diferentes se obtienen los mismos resultados y estudiar las posibles explicaciones. La página 54 del capítulo 5 permite profundizar el trabajo desplegado en esta página.

Las páginas 61 y 62 del capítulo 5 proponen avanzar en las estrategias de cálculo exacto y aproximado, deteniéndose particularmente en la estimación de resultados de multiplicaciones y divisiones. Para resolver las distintas situaciones propuestas, los alumnos podrán recurrir a redondear los números. Por ejemplo, en el problema 2 de la página 61, podrán redondear los números en juego, de modo de facilitar la identificación del resultado correcto y descartar los que resultan imposibles (para 2.042 × 19, podrán recurrir a calcular 2.042 × 20 o bien, 2.042 × 2 × 10, y, a partir de anticipar que el resultado será cercano a 40.000, desestimar 8.798 y 18.798).

2. Sin hacer la cuenta, seleccioná el resultado que creés que puede ser el correcto. Luego comprobá con la calculadora.

2.042 × 19	8.798	18.798	38.798
3.999 × 21	14.979	83.979	105.979
7.536 : 4	884	1.884	6.884
5.520 : 24	3	23	230

En las páginas 27 y 28 del capítulo 3, se presenta una colección de problemas variados que permiten retomar el trabajo en torno a diversos sentidos de las operaciones. Tomemos como ejemplo el problema 2 de la página 27.

2. Diego quiere construir una galería en su casa y consultó páginas de Internet para tener idea de los materiales que iba a necesitar. A medida que investigaba, fue tomando nota de la información que le interesaba. ¿Entre cuántas posibilidades diferentes puede elegir con los datos que tomó, si tiene que construir una columna, un techo y un piso?

Este tipo de problemas –que se retoman tanto en la portada como en las páginas 55 y 56 del capítulo 5– involucra la exploración de diferentes maneras posibles de organizar la información apelando a listas, cuadros de doble entrada, diagramas o cálculos. Se apunta a que, a partir de la comparación y el análisis de distintas propuestas, los alumnos avancen en la discusión acerca de cómo pueden estar seguros de que han identificado todas las posibilidades y que no han repetido ninguna propuesta. También, a que los alumnos establezcan vínculos con la multiplicación y apelen a esta operación al resolver problemas semejantes.

Las situaciones que se incluyen en las páginas 59 y 60 involucran la idea de potencia en problemas de tipo recursivo. Se apunta a que los alumnos exploren la potenciación como una escritura abreviada para multiplicaciones entre factores que se repiten.

3. Guadalupe diseñó un afiche para difundir sus clases de yoga para niños. Envió el afiche por correo electrónico a 10 personas, a las que les pidió que cada una lo reenvíe a otras 10 personas. ¿A cuántas personas les habrá llegado el afiche al cabo de 4 envíos? ¿Y al décimo envío?

El problema que se presenta en la sección “Para hacer todos juntos” de la página 60, apunta a que los alumnos exploren el uso de la calculadora (común o científica) para calcular potencias.

Para hacer todos juntos

a) Exploren en una calculadora científica qué teclas es preciso usar para encontrar los resultados de 7^2, 4^3 y 2^5.

b) Intenten obtener el número 25.643 usando la calculadora científica, las operaciones de suma y multiplicación, y las potencias de 10.

Las actividades que se proponen en las páginas 29 y 30 del capítulo 3 permiten avanzar en el estudio de las relaciones entre la multiplicación y la división, ideas que se retoman en las páginas 57 y 58 del capítulo 5 al analizar el funcionamiento de la división. Una de las variables que distingue a los problemas propuestos en ambos capítulos se relaciona con el resto de las divisiones que se abordan. En el capítulo 3, se apunta a explorar e identificar las relaciones entre dividiendo, divisor, cociente y resto en divisiones en las que el resto es cero; mientras que en el capítulo 5, será necesario considerar que el resto debe cumplir con la condición de ser menor que el divisor. Por ejemplo, para completar las cuentas que se presentan en el siguiente problema de la página 29 será necesario considerar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

3. Completá estas cuentas.

8	26	64
0 / 59	0 / 124	0 / 15

En la página 57 del capítulo 5, retomando el trabajo iniciado en estas páginas, se plantea:

3. ¿Cuál o cuáles de estos pares de números permiten completar esta cuenta?

24 | 2
/

a) Divisor 12 y resto 0.
b) Divisor 8 y resto 8.
c) Divisor 9 y resto 6.
d) Divisor 10 y resto 4.
e) Divisor 6 y resto 12.
f) Divisor 7 y resto 10.

El capítulo 7 comienza con un juego que permite movilizar las ideas de múltiplos y divisores. Si bien en esta actividad no hay una estrategia ganadora o una secuencia de números que permita ganar siempre la partida, es interesante analizar qué números conviene elegir para bloquear o limitar las posibilidades de selección del adversario. Posiblemente, este juego pueda convertirse en una referencia a evocar durante el desarrollo del capítulo o bien pueda retomarse más adelante, ya con un bagaje mayor de conocimientos que permita reflexionar con mayor profundidad sobre las estrategias más convenientes.

En la página 84 se proponen algunas situaciones que permiten acercarse a las ideas de múltiplo y divisor –o bien retomarlas si ya las hubieran trabajado en años anteriores– a partir de considerar cuántas

veces un número entra en otro y tratando de hacer explícito el entramado del que forman parte estas ideas en el estudio de la multiplicación y la división.

Este vínculo, que inicialmente se planteó en el contexto del dinero y de la calculadora, se presenta en la página 85, directamente como una relación entre números. Por ejemplo, en los problemas 1 y 2:

1. Encontrá 5 números que estén entre 100 y 200, que al dividirlos por 7 tengan resto 0.

2. ¿Cómo harías para encontrar un número que multiplicado por 8 dé 4.280?

En el problema 1 los números que se encuentran van a ser múltiplos de 7. En este caso es posible abordar la tarea a partir de ir ensayando tanto con multiplicaciones por 7 como a través de divisiones de números entre 100 y 200 por 7. Este trabajo permite generar buenas condiciones para discutir que un número es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar ese número (7 en este caso) por otro número natural, y también cuando al dividirlo por el número dado (7 en este caso), el resto es cero. Si bien las dos definiciones son matemáticamente equivalentes, cada una muestra una relación distinta.

Este grupo de problemas culmina con una actividad de la sección "Para hacer todos juntos" que permite explicitar una característica transversal vinculada al tipo de trabajo que se plantea a lo largo del capítulo.

Para hacer todos juntos

Nicolás ordena su colección de figuritas. Si las agrupa de a 6 no le sobra ninguna. Cuando las agrupa de a 5 tampoco le sobran. Y al agruparlas de a 4 tampoco le quedan figuritas sin agrupar. ¿Es posible determinar cuántas figuritas tiene Nicolás si se sabe que esa cantidad está entre 200 y 250?

En este problema es interesante analizar qué informaciones se tienen del número buscado antes de comenzar a explorar. Algunas informaciones pueden ser: como no sobran figuritas, al agruparlas de a 6, de a 5 y de a 4, el número buscado es múltiplo de 6, de 5 y de 4. Como la cantidad es múltiplo de 5, entonces debe terminar en cero o en cinco. Pero no puede terminar en 5 porque debe ser par, ya que también es múltiplo de 6 y de 4. Necesariamente el número buscado, entonces, termina en cero.

Al encarar el problema de esta manera, se pone en juego un aspecto anticipatorio. Las reflexiones realizadas no evitan la búsqueda de un múltiplo común entre 6; 5 y 4 que se halle entre 200 y 250, pero permiten controlar el resultado obtenido y acotar la búsqueda. Esta es, precisamente, la característica a resaltar: la posibilidad de realizar ciertas anticipaciones a partir de utilizar determinados conocimientos.

Es cierto que otros contenidos también habilitan este tipo de práctica, por ejemplo, la realización de un cálculo. Sin embargo, en este caso –como en muchos otros a lo largo del capítulo– la anticipación permite orientar el trabajo exploratorio. En cierto modo, se trata de un sentido algo distinto al asociado a la determinación del resultado de una acción sin realizarla. Aquí se trata de acotar el conjunto de números buscados a partir de analizar algunas relaciones con los restos de la división. No obstante, el resultado aún debe averiguarse.

El trabajo con múltiplos, divisores y cálculos que se inicia en la página 87 también puede leerse desde esta perspectiva:

Para hacer de a dos

1. Usando que 6 × 24 = 2 × 3 × 3 × 8, intenten responder las siguientes preguntas.

a) ¿Será cierto que el resultado de 6 × 24 es múltiplo de 8?

b) ¿Será cierto que el producto entre 6 y 24 es múltiplo de 9?

En este caso, pensar el resultado de 6 × 24 como descompuesto en 2 × 3 × 3 × 8 permite identificar cuáles son los divisores de ese producto, y eso puede hacerse sin recurrir a la división. Esa es la razón por la que en el enunciado se propone responder sin hacer la cuenta.

En varias de las situaciones se apela a la restricción de responder sin hacer la cuenta. Quisiéramos hacer un comentario sobre el alcance y el sentido de esta expresión. Por ejemplo, en el problema 4 de la página 87 puede leerse:

4. Se sabe que 1.080 es múltiplo de 24.

a) ¿Cuál es el resto de dividir 1.080 por 24? Intentá responder sin hacer la cuenta.

b) Sin hacer la cuenta, señalá las divisiones que estás seguro que tienen resto cero.

1.080 : 12	1.080 : 3	1.080 : 5	1.080 : 6	1.080 : 18

En el enunciado se indica que no puede hacerse “la” cuenta. En cierto modo está implícito que la cuenta que no puede hacerse es 1.080 : 24, pero para responder es necesario realizar algún cálculo. El problema consiste, entonces, en identificar qué otra cuenta (o cuentas) hay que hacer para obtener la

respuesta. Para los niños tal vez pueda resultar novedoso este tipo de práctica: realizar una cuenta para saber el resultado de otra.

En las páginas 89 y 90 se proponen actividades cuyo propósito es avanzar sobre las ideas de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Se trata allí no solo de que los niños puedan apropiarse de estos conceptos y utilizarlos correctamente, sino también de que los conocimientos sobre la descomposición multiplicativa de los números en juego les permitan encontrar el número buscado. Por ejemplo, en el problema 3 de la página 89 se propone la siguiente nota al docente:

3. Sabiendo que $3 \times 2 \times 2 \times 5 = 60$ y que $7 \times 5 = 35$, ¿es posible encontrar el mínimo común múltiplo entre 60 y 35?

En el problema 3 los alumnos podrán obtener el mcm mediante una exploración listando los múltiplos de 35 y 60 hasta encontrar el mínimo común. Sin embargo, la actividad apunta a que se utilice la información que brindan los factores de 60 y de 35. Esto implica analizar que el mcm buscado va a tener los factores que componen a 60 y a 35, y que va a tener la menor cantidad posible de factores para que sea el menor. En este caso sería:

$3 \times 2 \times 2 \times 5 = 60$

$2 \times 7 \times 5 = 70$

$\underbrace{3 \times 2 \times 2 \times 5}_{60} \times \underbrace{7 \times 5}_{35}$ va a dar un múltiplo común de 60 y de 35.

El mínimo de factores que se necesitan para "armar" el menor múltiplo de 60 y 35 sería:

$3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 5$

Entonces, el mcm (35, 60) = 420.

En el comentario al docente puede identificarse que en esta actividad no solo se apunta a establecer que el mcm entre 35 y 60 es 420, sino, también, a la posibilidad de comprender que es posible componer el múltiplo común a 35 y a 60 a partir de los factores que conforman a estos números y, para que sea el mínimo posible, es necesario utilizar solo los factores comunes a ambos números.

El capítulo concluye con un conjunto de actividades vinculadas con algunos criterios de divisibilidad. Nuevamente, la idea de anticipación se hace presente, ya que conocer estos criterios permite establecer, sin apelar a la división, si el resto de determinada cuenta va a ser cero.

II. ¿Qué se espera que los alumnos aprendan?

A partir del recorrido propuesto para los capítulos 3, 5 y 7, se espera que los alumnos puedan resolver problemas que involucren diversos sentidos de la multiplicación y la división, utilizando, comunicando y comparando diversas estrategias y cálculos posibles.

Como en cada capítulo se retoma el trabajo sobre los sentidos más sencillos y se incorporan otros nuevos, es factible anticipar que los alumnos tendrán diferente nivel de dominio de ellos. Se espera que usen cálculos para los sentidos de la multiplicación y la división que los niños tienen más disponibles (series proporcionales, repartos, organizaciones rectangulares, etc.). Como en el siguiente problema tomado del ejemplo de evaluación del capítulo 5.

3. Alma tiene que armar una clave de 3 letras para ingresar en un juego de la computadora. Eligió las letras A, B, C para armarla. Como puede repetir las letras, las claves pueden ser como estas: AAA, BAC, BBC, etc. ¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos le permiten saber cuántas claves distintas se pueden armar?

a) $3 \times 3 \times 3$

b) $3 + 3 + 3$

c) 3^3

d) $3 + 2 + 1$

e) $3 \times 2 \times 1$

En cambio, frente a problemas de multiplicar y dividir más complejos o novedosos para algunos alumnos (combinatoria, iteración, etc.), se espera una mayor diversidad de procedimientos, entre los que se incluyen dibujos, gráficos, esquemas, diagramas y también cálculo; por ejemplo, frente a este problema presente en el ejemplo de evaluación del capítulo 3:

1. Juan quiere comprar un menú y puede elegir una entrada, un plato principal y un postre. ¿De cuántas maneras distintas puede armar su menú?

En relación con las estrategias de cálculo, se espera que los alumnos hayan elaborado conocimientos en relación con el cálculo estimativo para multiplicaciones y divisiones, que amplíen el repertorio de cálculos memorizados y que puedan recurrir a la estrategia de apoyarse en un cálculo conocido para resolver otro desconocido, como se propone en este problema, también del ejemplo de evaluación del capítulo 3:

3. Usando que $36 \times 14 = 504$ calculá.

a) $36 \times 28 =$

b) $72 \times 14 =$

c) $18 \times 14 =$

d) $504 : 36 =$

e) $360 \times 14 =$

Se espera, asimismo, que los alumnos identifiquen las soluciones posibles de divisiones, cuestión que pone en juego las relaciones entre la multiplicación y la división, así como entre dividendo, divisor,

cociente y resto. En el problema 2 del ejemplo de evaluación del capítulo 5 se busca que utilicen esas relaciones:

2. A partir de la información que brinda la primera cuenta y sin hacer las divisiones, completá las dos cuentas siguientes.

365	17		17	370	17
8	21	4	21		21

A su vez, es esperable que los alumnos puedan apoyarse en las propiedades de las operaciones para determinar y justificar la validez de ciertas afirmaciones, como en el siguiente problema tomado del ejemplo de la evaluación del capítulo 3.

2. Sin hacer los cálculos, coloquen V (verdadero) o F (falso) y justifiquen usando las propiedades de las operaciones.

a) $56 \times 82 = 82 \times 56$ ☐

Porque

b) $8 \times 27 = 5 \times 27 + 3 \times 27$ ☐

Porque

c) $25 \times 18 = 25 \times 3 \times 6$ ☐

Porque

d) $4 \times 38 = 4 \times 30 + 8$ ☐

Porque

Al finalizar el capítulo 7 se busca que los alumnos puedan comprender y utilizar las ideas de múltiplo y divisor estrechamente vinculadas a la multiplicación y a la división. También se espera que puedan buscar múltiplos y divisores comunes por medio de diferentes estrategias de cálculo sin exigir el uso de representaciones o mecanismos únicos. Asimismo, es deseable que logren avanzar desde unos procedimientos iniciales en los que posiblemente apelen al listado de los múltiplos de los números que intervienen en la situación hacia otras formas de resolución más económicas. Estas formas de obtener los resultados pueden ser variadas pero se apoyarán tanto en las operaciones de multiplicación o división, o ambas, como en la descomposición multiplicativa de los números.

Uno de los objetivos del trabajo de este capítulo es que los alumnos puedan comprender y utilizar la idea de que un número puede concebirse formado por multiplicaciones entre otros números. Por ejemplo, el problema 2 del ejemplo de evaluación pone de manifiesto esta cuestión:

2. Usando que 180 = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 escribí tres divisores de 180 que no sean 2 ni 3 ni 5.

Se trata de que a partir del trabajo desarrollado los alumnos avancen en sus posibilidades de "leer" la información que brinda la multiplicación de los factores que componen a cada número para resolver diferentes cuestiones; por ejemplo, a partir de combinar los factores se puede obtener otros divisores como 4 (2 × 2); 6 (3 × 2), 12 (2 × 2 × 3), 15 (5 × 3), 36 (2 × 2 × 3 × 3), etcétera.

Se apunta, también, a que los niños puedan utilizar múltiplos y divisores de un número para realizar descomposiciones multiplicativas, encontrar el resultado de multiplicaciones, cocientes y restos, y decidir la validez de ciertas afirmaciones, como se propone en el problema 3 del ejemplo de evaluación.

3. A partir de este cálculo: 810 : 18 = 45, decidí si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) 810 es múltiplo de 45.

b) El resto de la división entre 810 y 18 es 45.

c) Si se le suma 18 a 810 y también se lo divide por 18, el resto no será 0.

d) 855 es múltiplo de 45.

Se pretende también que el trabajo con el capítulo 7 permita que los alumnos resuelvan problemas que implican el uso de criterios de divisibilidad para establecer relaciones numéricas y anticipar resultados, así como producir argumentos para validar afirmaciones.

III. ¿Cómo modificar la complejidad de los problemas?

A lo largo de los capítulos que se ocupan de las operaciones, se podrían tomar ciertas decisiones sobre algunas características de los problemas que podrían transformarlos en más sencillos o más complejos. En esta sección haremos referencia a algunas de esas posibles variaciones, que permitirán al docente acercar el problema a los alumnos que presenten dificultades para abordarlo, o bien proponer nuevos desafíos a

aquellos que estén en condiciones de profundizar un poco más sobre las relaciones que se intenta poner en juego. También es posible considerar algunos de los criterios que acá se desarrollan para organizar el trabajo con toda la clase.

Analicemos con más detalle ciertos criterios que permitirían hacer más sencillos o más complejos algunos de los tipos de problemas que buscan ampliar los sentidos de las operaciones.

Con respecto a los cálculos mentales, tanto exactos como estimativos, también es posible que para algunos alumnos o grupos sean muy complejos por no haberlos tratado en años anteriores. En ese caso, es posible proponer, en primer lugar, colecciones de cálculos mentales de multiplicaciones y divisiones de números redondos, como 25 × 4; 67 × 10; 72 × 100; 2.500 : 10; 3.400 : 100; etcétera.

Es probable que algunos alumnos dispongan de un repertorio de cálculos más amplio, mientras que otros requieran mayor tiempo de trabajo y reflexión. El docente podrá proponer el armado de listas de cálculos que conocen y de cálculos que les resultan difíciles, y analizar en cuáles de los que conocen podrían apoyarse para resolver los otros. Esta información podría estar disponible en el aula y en carpetas, de modo que los alumnos que lo necesiten puedan recurrir a ella. La construcción progresiva de cálculos memorizados de multiplicación y división vinculados a la tabla pitagórica, que es objeto de estudio en años anteriores, podría ser abordada por algunos alumnos de 6.° que lo requirieran como punto de partida para luego avanzar.

Un aspecto central en el tratamiento de los problemas y los cálculos son los números involucrados. En líneas generales, podemos reconocer que cuando el rango numérico es menor, o cuando los números son “redondos”, disminuye la complejidad de los problemas. Es preciso aclarar que esta modificación y sus efectos no solamente pueden operar porque los alumnos tengan dificultades para realizar cálculos, sino también porque con números más atrapables es más sencillo interpretar el sentido de la situación, anticipar resultados, imaginar una estrategia alternativa al cálculo y manipular los pasos intermedios.

A su vez, la modificación en el tamaño de los números intenta provocar que los alumnos exploren y pongan en juego diversas estrategias, interpelando sus conocimientos acerca de las propiedades de las operaciones y las descomposiciones numéricas que resultan pertinentes en cada caso. Con esta intención se modifica el tamaño de los factores involucrados en el siguiente problema de la página 26.

2. Resolvé los siguientes cálculos mentalmente y luego verificá los resultados con la calculadora.

5.000 × 10 =	5.000 × 20 =	5.000 × 50 =
500 × 100 =	5.000 × 200 =	5.000 × 500 =
600 : 10 =	600 : 20 =	600 : 30 =
6.000 : 100 =	6.000 : 200 =	6.000 : 300 =

El trabajo en torno a este tipo de cálculos que dan inicio al capítulo 3, podrá extenderse en el aula de ser necesario. De este modo, los alumnos podrán ganar confianza en sus propios recursos al ir construyendo un repertorio de resultados conocidos y de estrategias de composición y descomposición de números que serán reutilizables en cálculos más complejos. Una vez que los alumnos logren desplegar recursos propios para resolver estas multiplicaciones y divisiones, la tarea se puede ir complejizando con la variación del tamaño de los números en juego. Por ejemplo, en el siguiente problema que se propone en la página 54 del capítulo 5:

1. Calculá mentalmente.

150 × 5 =	480 : 5 =
75 × 50 =	4.200 : 50 =
40 × 500 =	6.000 : 500 =

La variación del tamaño de los números, así como de la cantidad de factores involucrados en el cálculo a resolver, puede ser también un recurso al que el docente apele para disminuir la complejidad de la tarea para que los alumnos logren ingresar al tipo de trabajo y se encuentren en mejores condiciones de tratar con la complejidad esperada. El docente, a su vez, puede tornar más complejos los cálculos mentales propuestos, sean exactos o estimativos, aumentando el tamaño de los números, acotando su “redondez”, incrementando la cantidad de números con los cuales se solicita operar, o bien presentando cálculos mentales que requieran establecer una jerarquía en las operaciones.

En relación con el uso de las calculadoras común y científica, si fuera necesario, se podrá brindar un espacio para la exploración de su funcionamiento, posibilidades y límites a partir de resolver algunos problemas sencillos. Para un niño que no ha tenido oportunidad de interactuar con estas herramientas, el hecho de que el "punto de los miles" no se anote en la calculadora como se hace en otros soportes puede convertirse en un obstáculo al tener que ingresar datos para resolver cálculos, dado que el punto lo transforma en otro número.

Los problemas también se modifican en función de las diversas maneras en que se presenta la información que se requiera para resolverlos. Por ejemplo, a través de enunciados, tablas, ilustraciones, cuadros de doble entrada, gráficos o en un entorno digital real o hipotético. Para algunos alumnos, leer información en gráficos o tablas puede ser más complejo. El mismo tipo de problema presentado en enunciados verbales, con toda la información ya organizada, también puede ser un paso previo a la resolución de problemas más complejos.

Frente a los problemas de combinatoria, la dificultad cambia notablemente al modificar la cantidad de colecciones, como también la cantidad de elementos que integran cada una. Asimismo, colaborar en la organización de los elementos de cada colección, o bien en los elementos que van constituyendo las combinaciones –recurriendo a tablas, listas, dibujos, diagramas de flechas– permitiría que los niños identifiquen la posibilidad de contar las combinaciones posibles, cuestión que resulta más accesible que si se presenta solo el enunciado y se deja a cargo del alumno la representación y la organización de toda la información que porta la situación. Tomamos los siguientes ejemplos de las páginas 27 y 56. En los dos primeros casos, el problema ofrece cierta organización de los datos, que queda a cargo de los alumnos en el tercer ejemplo.

2. Diego quiere construir una galería en su casa y consultó páginas de Internet para tener idea de los materiales que iba a necesitar. A medida que investigaba, fue tomando nota de la información que le interesaba. ¿Entre cuántas posibilidades diferentes puede elegir con los datos que tomó, si tiene que construir una columna, un techo y un piso?

Columnas:	Techo:	Piso:
Postes de luz	Policarbonato	Ladrillo
Hierro	Chapa	Cemento alisado
Cemento	Vidrio	Cerámico
	Madera	

Para hacer de a dos

4. a) Los 5 participantes de un certamen de canto tendrán que presentarse formando dúos con todos sus compañeros. ¿Cuántos dúos se formarán si cada participante tiene que cantar con cada uno de sus compañeros?

b) ¿Cuáles de estos procedimientos permitirían responder la pregunta?

Participantes	A	B	C	D	E
A	-	X	X	X	X
B	-	-	X	X	X
C	-	-	-	X	X
D	-	-	-	-	X
E	-	-	-	-	-

A B, C, D, E
B C, D, E
C D, E
D E

5 × 4 | 4 + 3 + 2 + 1 | (5 × 5 – 5) : 2 | (5 × 4) : 2 | 4 + 4 + 4 + 4 + 4

Para hacer todos juntos

Verónica fue a comprar $\frac{1}{2}$ kilo de helado de agua. El heladero le dice que solo puede incluir 3 gustos de los 5 que hay en la heladería. ¿De cuántas maneras puede armar el pedido?

En aquellos problemas que exigen realizar varias operaciones, la cantidad de pasos requeridos también es una variable didáctica que afecta la complejidad del problema dado, que involucra no solo reconocer qué cálculos es necesario realizar para resolverlos, sino, también, en qué orden efectuarlos.

Otro aspecto a tener en cuenta para graduar la complejidad o adaptar los problemas para hacerlos más sencillos, se vincula con los recursos que se habilitan para la resolución. Por ejemplo, si se permite usar la calculadora o no. En aquellos momentos en los que el centro de la tarea del alumno es que pueda

reconocer qué operaciones tiene que resolver y en qué orden, el uso de la calculadora le permite liberarse de la sobrecarga del cálculo y centrar su atención en las operaciones a realizar. Asimismo, para aquellos alumnos que no logran identificar en algunos problemas cuáles son las operaciones por resolver, ofrecerles conjuntos de cálculos para que puedan seleccionar cuáles permitirían resolver el problema puede resultar un paso intermedio que les facilite el arribo a la tarea requerida en otra clase.

En el capítulo 7 es posible tomar ciertas decisiones sobre algunas características de los problemas que podrían transformarlos en situaciones más sencillas o más complejas.

Una transformación posible se refiere al tamaño de los números. Por ejemplo, el siguiente es el problema 1 de la página 84:

1. Este es un billete emitido por el Banco Central de Cuba. ¿Cuáles de las siguientes cantidades se pueden pagar justo usando solo billetes de este valor?

a) $93 **b)** $360 **c)** $369 **d)** $450 **e)** $451

Es factible que algunas de las cantidades que deben pagarse no ofrezcan dificultades, precisamente por tratarse de números pequeños. Así, por ejemplo, para saber si $93 se pueden pagar usando solo billetes de $3, es posible ir sumando de 3 en 3 desde 0, o bien restar sucesivamente 3 desde 93, o realizar algunas multiplicaciones y sumas (por ejemplo, 3 × 10 = 30 y luego triplicar ese resultado y sumarle 3), etc. Es decir, es factible acercarse a 93 desde 0 o llegar a 0 desde 93 por aproximaciones sucesivas.

Sin embargo, otros números pueden resultar más complejos porque esta aproximación requiere más pasos o no resulta tan evidente de qué manera ir componiendo o descomponiendo considerando los resultados parciales.

Junto con el tamaño también es posible considerar de qué número se trata, ya que, para el caso que estamos analizando, 3.000 sería un número sencillo para determinar si puede pagarse solo con billetes de $3, en cambio, 756 –que es menor– seguramente resulte bastante más complejo.

Otra característica para tomar en consideración es el conjunto de números que forman parte de los datos que se ofrecen en el problema. Por ejemplo, este es el problema de la sección “Para hacer todos juntos” de la página 86:

Para hacer todos juntos

Nicolás ordena su colección de figuritas. Si las agrupa de a 6 no le sobra ninguna. Cuando las agrupa de a 5 tampoco le sobran. Y al agruparlas de a 4 tampoco le quedan figuritas sin agrupar. ¿Es posible determinar cuántas figuritas tiene Nicolás si se sabe que esa cantidad está entre 200 y 250?

Ya hemos analizado esta actividad en la presentación de este escrito. Allí nos referimos a cierto tipo de análisis que puede hacerse de manera de acotar la exploración y facilitar la tarea de encontrar el resultado. La posibilidad de establecer de antemano que el número buscado tiene que terminar en cero, se sustenta en que uno de los números que interviene es 5 y que sus múltiplos terminan en cero o bien en cinco, y que los múltiplos de 4 y 6 –los otros números en cuestión– son siempre pares. Entonces, para coordinar estos dos requisitos, los múltiplos de 5 terminados en 5 deben descartarse.

Este análisis no podría realizarse si los números en juego fueran, por ejemplo, 3; 7 y 11. En este caso, el problema se vuelve más complejo y también pierde una de sus propiedades más relevantes: la posibilidad de conjeturar qué características va a tener el resultado que se busca.

IV. Bibliografía para el docente

- **Bressan, A. M.** (1998). *La división por dos cifras: ¿un mito escolar?* Consejo Provincial de Educación de Río Negro, Secretaría Técnica de Gestión Curricular, área Matemática. Disponible en *www.Rio negro.gov.ar*.
- **Broitman, C.** (2011). *Estrategias de cálculo con números naturales. Segundo ciclo EGB.* Cuadernos de Apoyo didáctico. Bs. As. Santillana.
- **Carraher, T.; Carraher, D.; Schliemann, A.** (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México. Siglo XXI.
- **DGCyE, Pcia. de Bs. As., SSE, Dirección Provincial de Educación Primaria** (2008). *Diseño Curricular para la Educación Primaria. Segundo ciclo.* Disponible en *www.abc.gov.ar*.
- **Dirección de Educación General Básica. Pcia. de Buenos Aires** (2001). *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB.* Disponible en *www.abc.gov.ar*.
- **Dirección de Educación General Básica. Pcia. de Buenos Aires** (2001). *Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB.* Disponible en *www.abc.gov.ar.*
- **Dirección de Educación General Básica. Pcia. de Buenos Aires** (2001). *Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB.* Disponible en *www.abc.gov.ar.*
- **Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Buenos Aires** (2007). *División en 5.° y 6.° años de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.* Disponible en *www.abc.gov.ar.*
- **Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Buenos Aires** (2011). *Mejorar los aprendizajes. Área Matemática. Juegos que pueden colaborar con el trabajo en torno al cálculo mental (versión preliminar).* Disponible en *www.abc.gov.ar.*
- **Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Buenos Aires** (2009). *Mejorar los aprendizajes. Área Matemática. Cálculo mental y algorítmico.* Disponible en *www.abc.gov.ar.*

- **Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Buenos Aires** (2009). *Mejorar los aprendizajes. Área Matemática. Cálculo mental de sumas y restas. Propuestas para trabajar en el aula.* Disponible en *www.abc.gov.ar.*
- **MECyT** (2006). *Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza. 4.°, 5.° y 6.° años. Educación Primaria.*
- **MECyT** (2011). *Serie Piedra Libre.* Disponible en *www.me.gov.ar.*
- **Ministerio de Educación. GCBA. Dirección de Currícula.** (2006). *Cálculo Mental con Números Naturales. Apuntes para la enseñanza.* Disponible en *www.buenosaires.gov.ar*.
- **Ministerio de Educación GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula** (2004). *Diseño Curricular. Segundo Ciclo.* Disponible en *www.buenosaires.gov.ar.*
- **Itzcovich, H.** (Coord.) (2007). *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Bs. As. Aique.
- **Lerner, D.** (1992). *La matemática en la escuela aquí y ahora.* Bs. As. Aique.
- **Parra, C.** (1994). "Cálculo mental en la escuela primaria". En: Parra, C. y Saiz, I. (comp.). *Didáctica de las matemáticas.* Bs. As. Paidós.
- **Parra, C. y Saiz, I.** (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos*. Bs. As. Homo Sapiens Ediciones.
- **Ponce, H.** (2000). *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo.* Bs. As. Novedades Educativas.
- **Ponce, H.** (2015). "La enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria. A propósito de la divisibilidad". En: *Las propuestas de enseñanza y la planificación en la Educación Primaria.* Bs. As. Homo Sapiens Ediciones.
- **Saiz, I.** (1994). "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". En: Parra, C. y Saiz, I. (comp.) op. cit.
- **Secretaría de Educación. GCBA. Dirección de Currícula** (1997). *Documento de actualización curricular N.° 4. Matemática.* Disponible en *www.buenosaires.gov.ar.*
- **Solá, G.** (2008). "La divisibilidad, un contenido que promueve la reflexión". En: *Revista 12(ntes) Enseñar Matemática Nivel Inicial y Primario N.° 3.* Buenos Aires.
- **Vergnaud, G.** (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela.* México. Trillas.